ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 9 **April 1929** **Heft 2**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. H. Pötter: Ueber den Einfluß der Ausbildung des Kopfes von Schaufelprofilen bei Kreiselrädern auf die Kavitation	85
J. Schmekel: Die Beeinflussung von Grenzschichten durch Temperaturfelder	101
R. Tiemann: Kinetik pseudoharmonischer Reibungsschwingungen	110
D. Starke: Die Maximalmomentenfläche eines Gerberschen Balkens	130
Zusammenfassende Berichte. R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer: Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung (Fortsetzung und Schluß)	132
Buchbesprechungen. Stumpff: Analyse periodischer Vorgänge. — Rothe: Höhere Mathematik. — Eisner: Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern. — Zingler: Theorie der zusammengesetzten Waagen. — Auerbach und Hort: Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik. — Courant: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung	164
Nachrichten	167

HAUPTAUFSÄTZE

Über den Einfluß der Ausbildung des Kopfes von Schaufelprofilen bei Kreiselrädern auf die Kavitation.

Von **H. PÖTTER** in Essen.

Bei schnellaufenden Turbopumpen und Turbinen hoher Schnelläufigkeit treten oft Korrosionen auf, die ein wesentlich anderes Aussehen haben, als bei rein chemischer oder galvanischer Einwirkung lufthaltigen Wassers. Man nennt diese Erscheinung Kavitation. Im Grunde genommen handelt es sich bei diesen Vorgängen um das Entstehen und Verschwinden von Hohlräumen, deren häufiger Wechsel die Zerstörung des Materials hervorruft. Durch die Erfahrung mit Turbinenpropellern weiß man nun, daß die Kavitation hauptsächlich von der Höhe der Geschwindigkeit und von der Form der Schaufeln einschließlich des Anstellwinkels, d. h. von der Verwirklichung stoßfreien Eintrittes abhängt. Je nach der Anstellung, der Zuschärfung und der Abrundung übersteigt die größte im Gesamtquerschnitt auftretende Geschwindigkeit mehr oder weniger die mittlere oder die im Unendlichen vorhandene Zuströmgeschwindigkeit. Föttinger[1]) hat diesen Ueberschuß als Prozentsatz des ungestörten Wertes mit »Uebergeschwindigkeit« bezeichnet. Man muß also diese bestimmen, um die Gefahr der Hohlraumbildung erkennen zu können. Die Möglichkeit, daß sie durch nicht stoßfreien Eintritt stark erhöht wird, kann man durch richtige Ausbildung der Eintrittswinkel stark vermindern, wenn auch nicht ganz beseitigen, da ja bei einer Turbine schon durch kleinste Bewegungen

[1]) Literaturverzeichnis: Bauersfeld: Die Grundlagen zur Berechnung schnellaufender Kreiselräder. Z. d. V. D. I. 1922. — Blumenthal: Ueber die Druckverteilung längs Joukowskischer Tragflächen. Z. F. M. 1913. — Föttinger: Kavitation und Korrosion. Hydraulische Probleme. — Fuhrmann: Ballonuntersuchungen. Dissertation Göttingen 1911. — v. Kármán: Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern. Abhandlung aus dem aerodynamischen Institut der T. H. Aachen. — v. Kármán u. Trefftz: Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte. Z. F. M. 1918. — v. Mises: Theorie des Tragflächenauftriebes. Z. F. M. 1917 und 1920. — Müller: Ueber ebene Potentialströmung mit Zirkulation. Diese Zeitschrift 1923 und 1924. — Schilhansl: Kavitation und Korrosion Die Wasserkraft 1925. — Thoma: Die neuere Entwicklung der Wasserturbinen. Z. d. V. D. I. 1921. — Thoma: Die Kavitation bei Wasserturbinen. Hydraulische Probleme. — Trefftz: Graphische Konstruktion Joukowskischer Tragflächen. Z. F. M. 1913.

des Regulierapparates ständig kleine Schwankungen in der Zuströmrichtung des Wassers bedingt sind. Es erscheint nun von Wichtigkeit, zunächst einmal den Einfluß der Ausbildung der Schaufelkanten auf die Uebergeschwindigkeit zu untersuchen, um ein günstigstes Profil sowohl für axiale als auch für schiefwinklige Anströmung zu erhalten. Für axial angeströmte Halbprofile wird mit Hilfe des Rankineschen Verfahrens gezeigt, daß nicht allein die Abrundung an der Spitze des Profiles, sondern auch in großem Maße die Ausbildung hinter der Spitze für die Größe des maximalen Unterdruckes maßgebend ist. Die schiefwinklige Anströmung wird mit Hilfe der konformen Abbildung untersucht. Es ergibt sich, daß hier ungefähr die gleiche Abrundung der Spitze die besten Ergebnisse zeigt, die auch bei axialer Anströmung am günstigsten ist.

1. Halbprofile. Das Rankinesche Verfahren. Die Potentialtheorie gestattet, die Strömung um gewisse Körper zu errechnen. Bei gegebenen Körpern gibt es aber kein analytisches Verfahren zur Bestimmung der Stromfunktion Ψ und Potentialfunktion Φ. Rankine hat dazu ein anderes Verfahren angewandt. Er ersetzt die Kontur durch ein System von Quellen- und Senkenfäden, über das er noch eine Parallelströmung lagert.

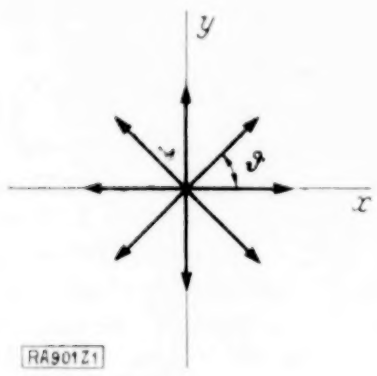


Abb. 1.

Die von einem punktförmigen Quellenfaden gelieferte Strömung verläuft radial nach außen (Abb. 1). Die Kontinuitätsgleichung fordert, daß durch alle der Quelle umschriebenen Kreise in der Zeiteinheit die gleiche Flüssigkeitsmenge fließt. Die Geschwindigkeit muß infolgedessen umgekehrt proportional dem Abstande vom Mittelpunkte sein, $c_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{C}{r}$, wo Q die in der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsmenge, die Ergiebigkeit der Quelle ist.

Da $c_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ ist, ist

$$\Phi = C \ln r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Stromfunktion heißt

$$\Psi = C\vartheta = C \operatorname{arctg} y/x \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Potentialgleichung lautet

$$\left.\begin{aligned} \chi = \Phi + i\Psi = C(\ln r + i\vartheta) = C \ln z \\ z = r e^{i\vartheta} \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$c_x - i c_y = \frac{d\chi}{dz} = \frac{C}{z}$$

$$c_x = C \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad c_y = C \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (4).$$

Ueberlagert man nun der Quelle eine Parallelströmung von der Geschwindigkeit a, so erhält man einen sogenannten Halbkörper wie in Abb. 2. Die Strom-

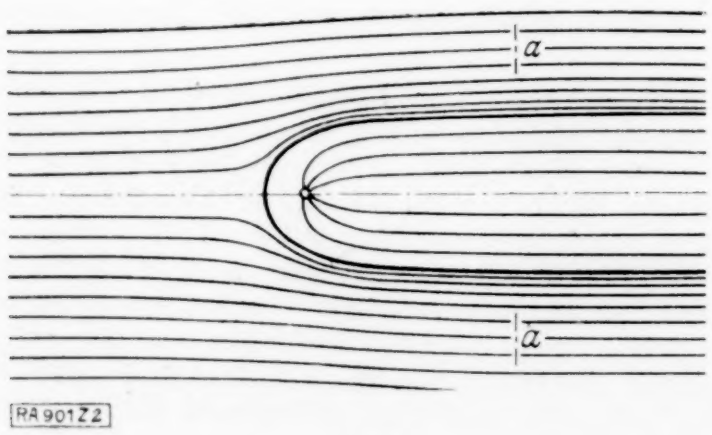


Abb. 2.

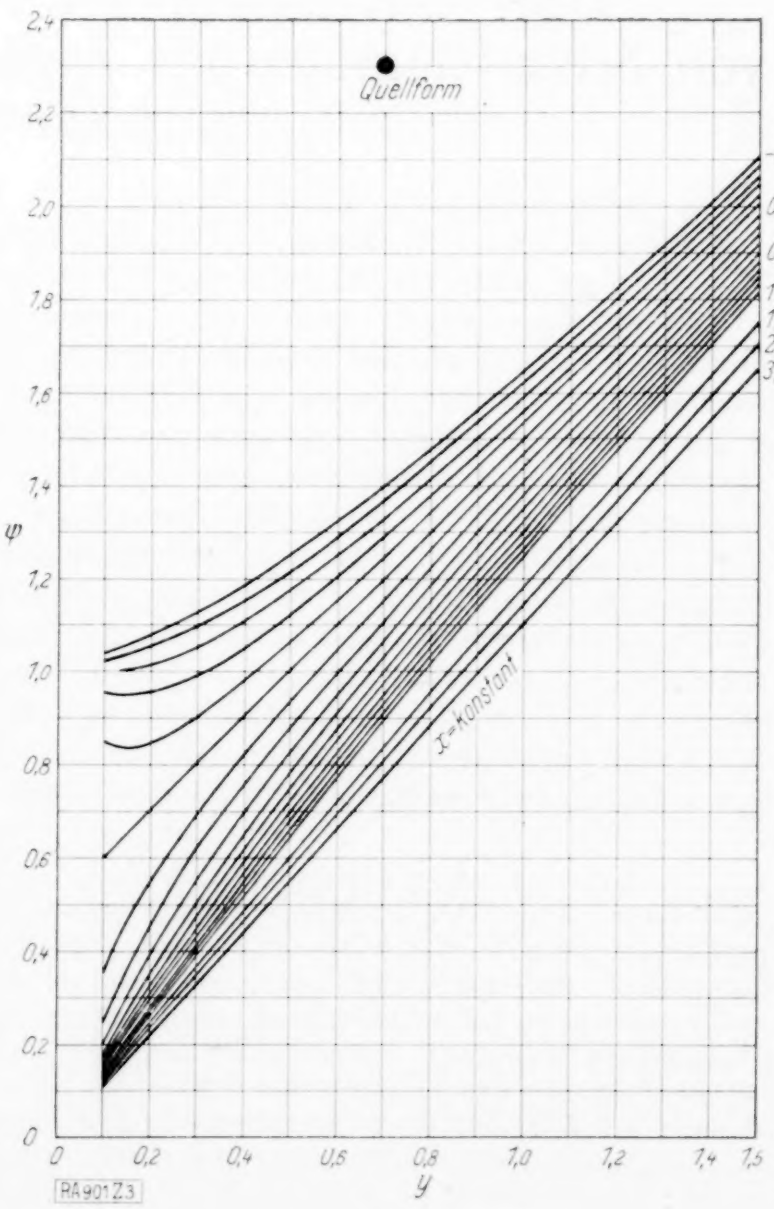


Abb. 3.

funktion an einer Stelle $a-a$ setzt sich dann aus zwei Teilen zusammen, aus der Parallelströmung ${}^{i}\Psi_1 = 2\,a\,y$ und der Quellströmung ${}^{i}\Psi_2 = 2\,C\,\mathrm{arctg}\,y/x$. Die Gesamtstromfunktion heißt also

$$ {}^{i}\Psi_{ges} = {}^{i}\Psi_1 + {}^{i}\Psi_2 = 2\,(a \cdot y + C\,\mathrm{arctg}\,y/x). $$

Da das Profil symmetrisch zur x-Achse ist, braucht man nur eine Hälfte zu betrachten und erhält

$$ {}^{i}\Psi_{ges} = a \cdot y + C\,\mathrm{arctg}\,y/x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5). $$

Die Werte von arctg y/x stellen Vielfache von π dar; deshalb wird auch $C = 1/\pi$ genommen. Die Geschwindigkeit a wird $= 1$ gesetzt. ${}^{i}\Psi$ wurde in Abhängigkeit von y für $x =$ konst. aufgetragen (Abb. 3 für den punktförmigen Quellenfaden). Parallelen zur Abszisse ergeben die Werte von x und y, die gleiche ${}^{i}\Psi$-Werte haben. Man kann also so die einzelnen Stromlinien punktweise aufzeichnen. Die Stromlinie, die die Kontur darstellt, ist leicht zu ermitteln, da diese die gesamte der Quelle entströmende Flüssigkeit umschließen muß. Weil im Unendlichen Quell- und Parallelgeschwindigkeit gleich sind, erhält man dafür die Bedingung ${}^{i}\Psi = 1$. Hat man nun die Kontur punktweise ermittelt, kann man den Druckverlauf längs derselben finden, indem man für die einzelnen Punkte c_x und c_y und daraus mit $a\,V$, die an die Kontur tangierende Geschwindigkeit errechnet.

$$ V = \sqrt{(a + c_x)^2 + {c_y}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6). $$

Die Bernoullische Gleichung ergibt für den Druck, wenn man von den Schwerkräften absieht, die Beziehung

$$ \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{a^2}{2g}, $$

wobei p_0 der Druck in der ungestörten Flüssigkeit ist. Setzt man hierin $\gamma/g = \varrho$, $\frac{\varrho}{2} V^2 = h$, $\frac{\varrho}{2} a^2 = h_0$ und den Druck $p_0 = 0$, so ergibt sich p zu

$$ p = h_0 - h. $$

Dieser wird auf die Geschwindigkeitshöhe der ungestörten Strömung bezogen, denn für eine gegebene Kontur ist er an einem gegebenen Punkt ihr proportional, da V proportional a ist. Als Maß für den Druckunterschied bekommt man also die Geschwindigkeitshöhe der ungestörten Strömung. Man erhält

$$ \frac{p}{h_0} = 1 - \frac{h}{h_0} = 1 - \left(\frac{V}{a}\right)^2 \qquad (7). $$

Den Scheitelpunkt der Konturkurve liefert uns das Diagramm nicht. Er läßt sich jedoch infolge der Bedingung bestimmen, daß die Quell- und die Parallelströmung gleich groß, die Geschwindigkeit in diesem Punkt also Null sein muß. In Abb. 4 ist für den punktförmigen Quellenfaden die mittels der Kurven in Abb. 3 ermittelte Kontur aufgezeichnet. Darunter ist das errechnete Druckverhältnis p/h_0 und die errechnete Geschwindigkeit von der x-Achse als Abszisse aufgetragen.

Um noch weitere Profile zu erhalten, ist für verschiedene Quellformen die Potentialströmung ermittelt worden. Außer der punktförmigen Quelle wird noch die, deren Ergiebigkeit längs einer Strecke l konstant ist und die, die längs dieser Strecke eine dem Abstande vom Anfangspunkte proportionale Intensität hat, behandelt.

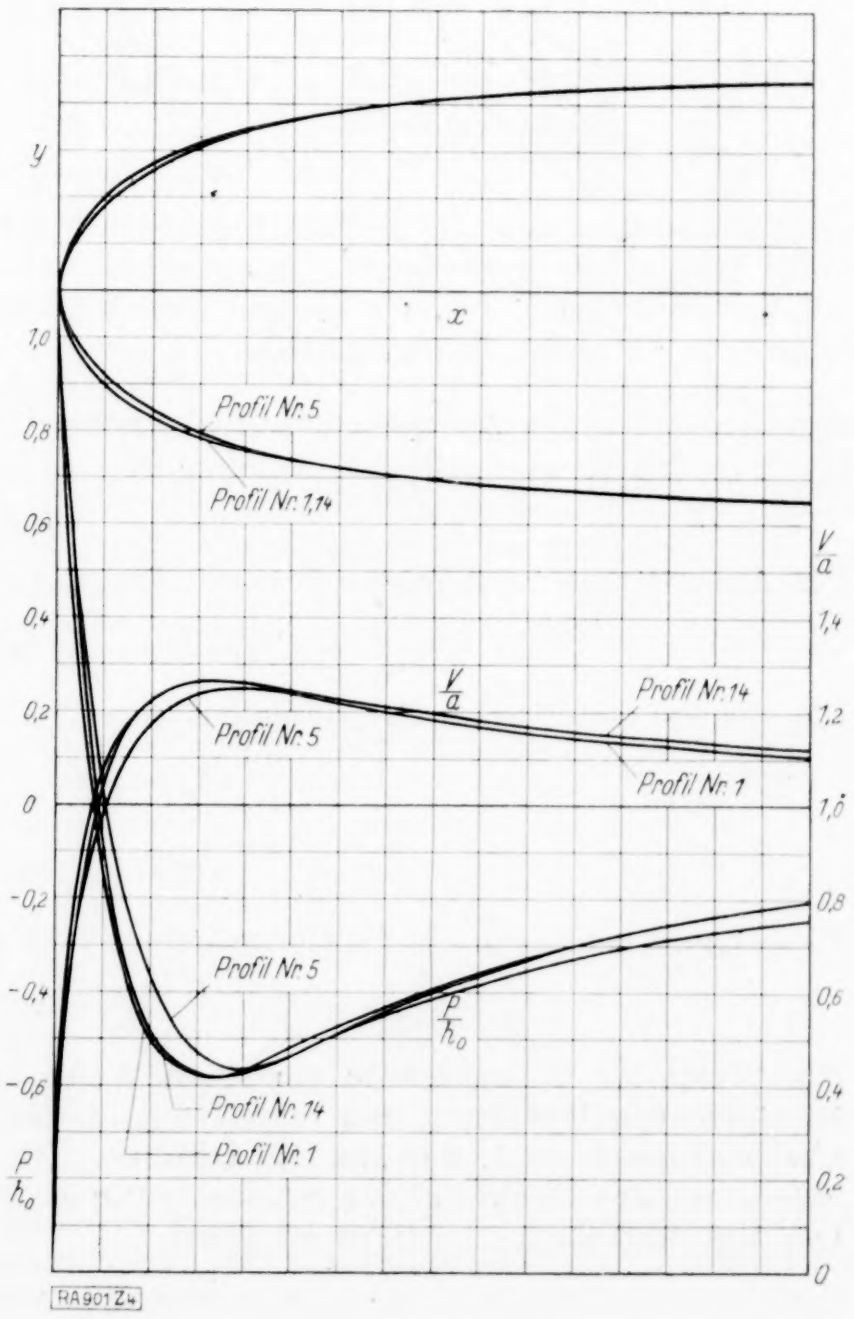


Abb. 4.

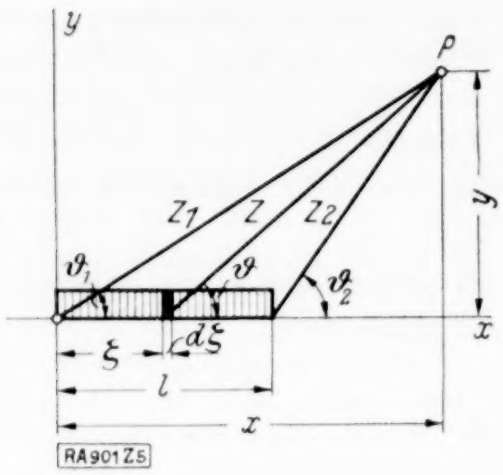


Abb. 5.

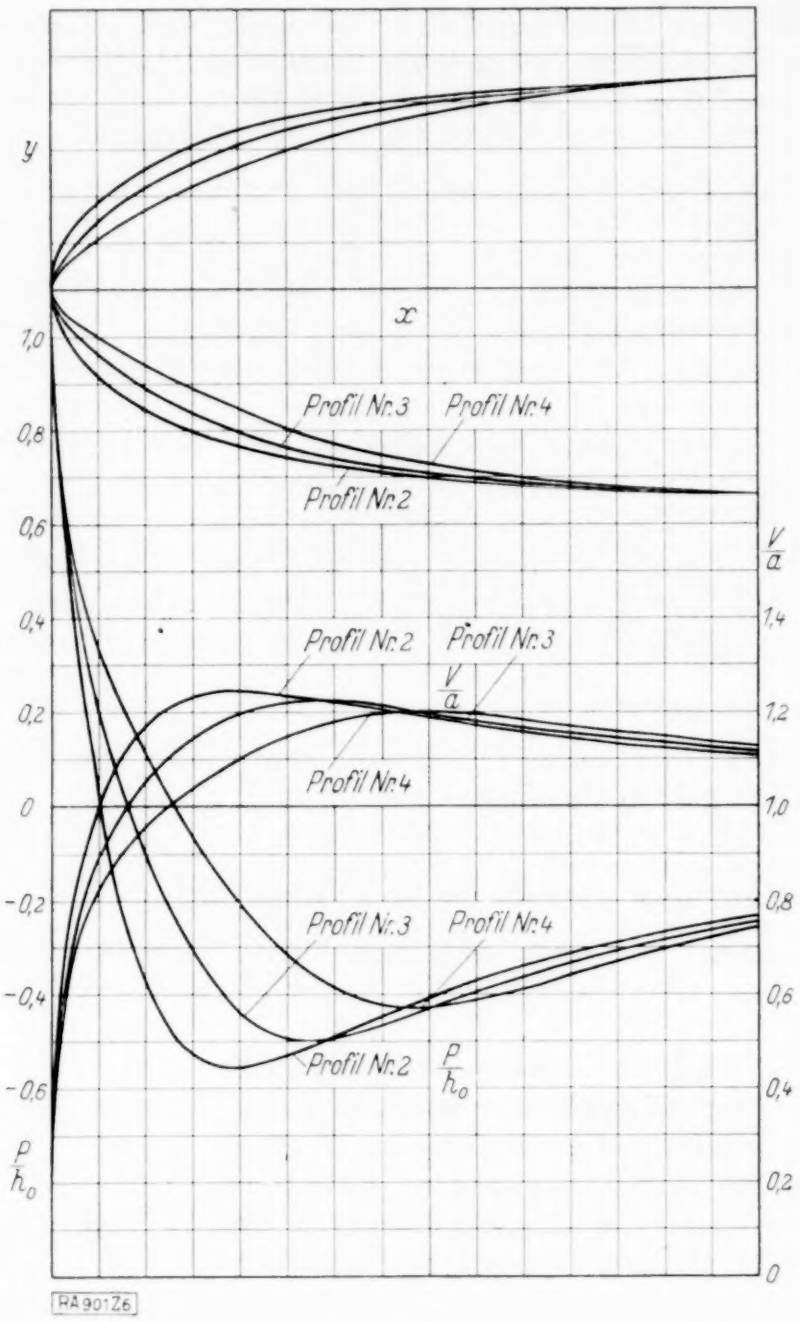


Abb. 6.

Um alle nachher miteinander kombinieren und vergleichen zu können, muß ihre Gesamtergiebigkeit gleich sein. Bei der Quelle konstanter Ergiebigkeit längs der Länge l ist die Ergiebigkeit für die Längeneinheit

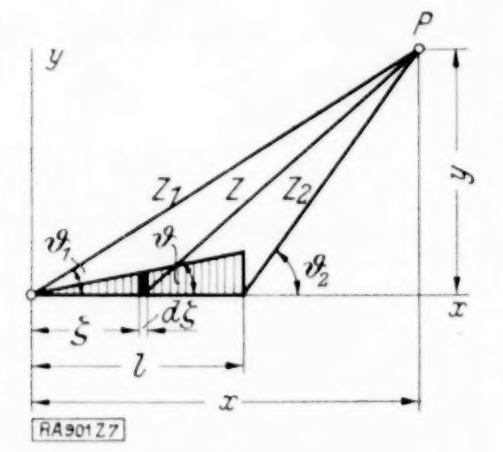


Abb. 7.

also $= \frac{2\pi \cdot C}{l}$. Ein Element der Quellstrecke $d\xi$, das vom Nullpunkt den Abstand ξ hat (Abb. 5), liefert den Beitrag im Punkte P

$$d\chi = 1/l \cdot C \ln z \, d\xi.$$

Die Auswertung der Gleichung ergibt für χ, wenn man die Grenzen einsetzt:

$$\chi = \Phi + i\,\Psi = -\frac{C}{l}\left[z_1 \ln \frac{z_2}{z_1} - l\,\{\ln z_2 - 1\}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Strom- und Potentialfunktionen heißen:

$$\Psi = \frac{C}{l}\left[l\,\vartheta_2 - x\,(\vartheta_2 - \vartheta_1) + y \ln \frac{r_1}{r_2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$\Phi = \frac{C}{l}\left[l \ln r_2 + x \ln \frac{r_1}{r_2} + y\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Ueberlagert man noch die Parallelströmung $\Psi = a \cdot y$, so erhält man für die Gesamtströmung

$$\Psi_{ges} = a \cdot y + \frac{C}{l}\left[l\,\vartheta_2 - x\,(\vartheta_2 - \vartheta_1) + y \ln \frac{r_1}{r_2}\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,a).$$

Die Werte für Ψ werden in derselben Weise aufgetragen, wie in Abb. 3 für den punktförmigen Quellenfaden, und damit die in Abb. 6 aufgezeichneten Konturen für die Quellenlänge $l = 0{,}5$, 1,0 und 1,5 erhalten. Die Scheitelpunkte bekommt man auch hier, indem man den Punkt auf der x-Achse bestimmt, in dem die Parallel- und Quellgeschwindigkeit sich aufheben. Letztere ist gleich

$$c_x - i\,c_y = \frac{d\chi}{dx} = -\frac{C}{l} \ln \frac{z_2}{z_1};$$

$$c_x = -\frac{C}{l} \ln \frac{r_2}{r_1}, \qquad c_y = \frac{C}{l}\,(\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die Geschwindigkeit V und das Druckverhältnis p/h_0 werden nach Gl. (6) bzw. (7) ermittelt und sind auch in Abb. 6 analog wie in Abb. 4 aufgetragen.

Als weitere Quellform wird eine solche genommen, deren Intensität längs einer Strecke l dem Abstande vom Anfangspunkte proportional ist (Abb. 7). Die Ergiebigkeit der Elementarquelle sei $d \cdot \xi \cdot d\xi$. Dann ist die Gesamtergiebigkeit

$$2\pi \cdot d \int_0^l \xi \cdot d\xi = 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \frac{l^3}{2} = 2\pi \cdot C.$$

Es ist also $d = 2C/l^2$. Die Intensität der Elementarquelle ist folglich $2C/l^2 \cdot \xi \cdot d\xi$. Ihr Beitrag zum Strömungspotential am Punkte P ist dann

$$d\chi = \frac{2C}{l^2} \xi \ln z d\xi.$$

Daraus ergibt sich nach Einsetzen der Grenzen für χ:

$$\chi = \Phi + i\Psi = \frac{2C}{l^2}\left[\frac{z_2^2}{2} \ln z_2 - \frac{z_2^2}{4} - z_1 z_2 \ln z_2 + z_1 z_2 + \frac{z_1^2}{2} \ln z_1 - {}^3/_4 z_1^2\right] \quad (12).$$

Strom- und Potentialfunktion heißen:

$$\Psi = \frac{C}{l^2}\left[\vartheta_2 \{(x-l)^2 - 2x(x-l) + y^2\} + \vartheta_1 (x^2 - y^2) + 2xy \ln \frac{r_1}{r_2} - yl\right] \quad (13),$$

$$\Phi = \frac{C}{l^2}\left[\ln r_2 \{(x-l)^2 - 2x(x-l) + y^2\} + \ln r_1 (x^2 - y^2) + 2xy(\vartheta_2 - \vartheta_1) - l\left(x + \frac{l}{2}\right)\right] \quad (14).$$

Die Stromfunktion für das gesamte System erhält man zu

$$\Psi_{ges} = a \cdot y + \frac{C}{l^2}\left[\vartheta_2 \{(x-l)^2 - 2x(x-l) + y^2\} + \vartheta_1 (x^2 - y^2) + 2xy \ln \frac{r_1}{r_2} - yl\right] \quad (13a).$$

Die Geschwindigkeit an irgend einer Stelle ergibt sich zu

$$c_x - ic_y = \frac{d\chi}{dz} = -\frac{2C}{l^2}\left[z_1 \ln \frac{z_2}{z_1} + l\right]$$

$$c_x = -\frac{2C}{l^2}\left[x \ln \frac{r_2}{r_1} - y(\vartheta_2 - \vartheta_1) + l\right]; \qquad c_y = \frac{2C}{l^2}\left[y \ln \frac{r_2}{r_1} + x(\vartheta_2 - \vartheta_1)\right] \quad (15).$$

Diese Quellform liefert für $l = 1{,}0$ und $l = 1{,}5$ spitze Konturen, die außerdem noch einen Wendepunkt haben, für praktische Zwecke infolgedessen unbrauchbar sind. Ihre Werte $(p/h_0)_{min}$ und $x/2d$ — x = Entfernung des Druckminimums von der Spitze, $2d$ = Dicke des Profiles im Unendlichen — sind in Tabelle 1 eingetragen. Nur $l = 0{,}5$ liefert ein abgerundetes Profil, das in Abb. 4 eingezeichnet ist.

Als vierte Quellform wird die gewählt, deren Intensität längs der Länge l proportional der Entfernung vom Anfangspunkt abfällt (siehe Tabelle 1, Profil Nr. 8, 9, 10). Zur Berechnung der einzelnen Formeln braucht man nur die komplexe Strömungsfunktion der proportional der Entfernung vom Anfangspunkt ansteigenden Streckenquelle von der konstanter Ergiebigkeit zu subtrahieren und erhält

$$\chi = \frac{2C}{l^2}\left[\frac{z_1^2}{2} \ln z_1 - \frac{z_1^2}{4} - z_1 z_2 \ln z_1 + z_1 z_2 + \frac{z_2^2}{2} \ln z_2 - \frac{3}{4} z_2^2\right] \quad (16),$$

$$\Psi = \frac{C}{l^2}\left[\vartheta_1 [x^2 - 2x(x-l) + y^2] + \vartheta_2 \{(x-l)^2 - y^2\} + 2(x-l) \cdot y \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + yl\right] \quad (17),$$

$$\Phi = \frac{C}{l^2}\left[\ln r_1 [x^2 - 2x(x-l) + y^2] + \ln r_2 \{(x-l)^2 - y^2\} + 2(x-l) \cdot y(\vartheta_2 - \vartheta_1) - l\left(x + \frac{l}{2}\right)\right] \quad (18),$$

$$\Psi_{ges} = a \cdot y + \frac{C}{l^2}\left[\vartheta_1 [x^2 - 2x(x-l) + y^2] + \vartheta_2 \{(x-l)^2 - y^2\} + 2(x-l) \cdot y \ln \frac{r_2}{r_1} + yl\right] \quad (17a),$$

$$c_x = \frac{2C}{l^2}[(x-l) \ln \frac{r_2}{r_1} - y(\vartheta_2 - \vartheta_1) + l], \quad c_y = -\frac{2C}{l^2}[y \ln \frac{r_2}{r_1} + (x-l)(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \quad (19).$$

Die Auswertung ist aus Abb. 8 ersichtlich.

Um eine noch größere Mannigfaltigkeit der erzeugten Konturen zu erreichen, wurden verschiedene Quellen übereinander gelagert. Da die Gesamtintensität der Kombination nicht größer als $2\pi C$ sein soll, ist die Ergiebigkeit jeder einzelnen Quelle $= \pi C$ angenommen. Die Quellformen und die Ergebnisse sind in Abb. 9 und Tabelle 1 aufgetragen.

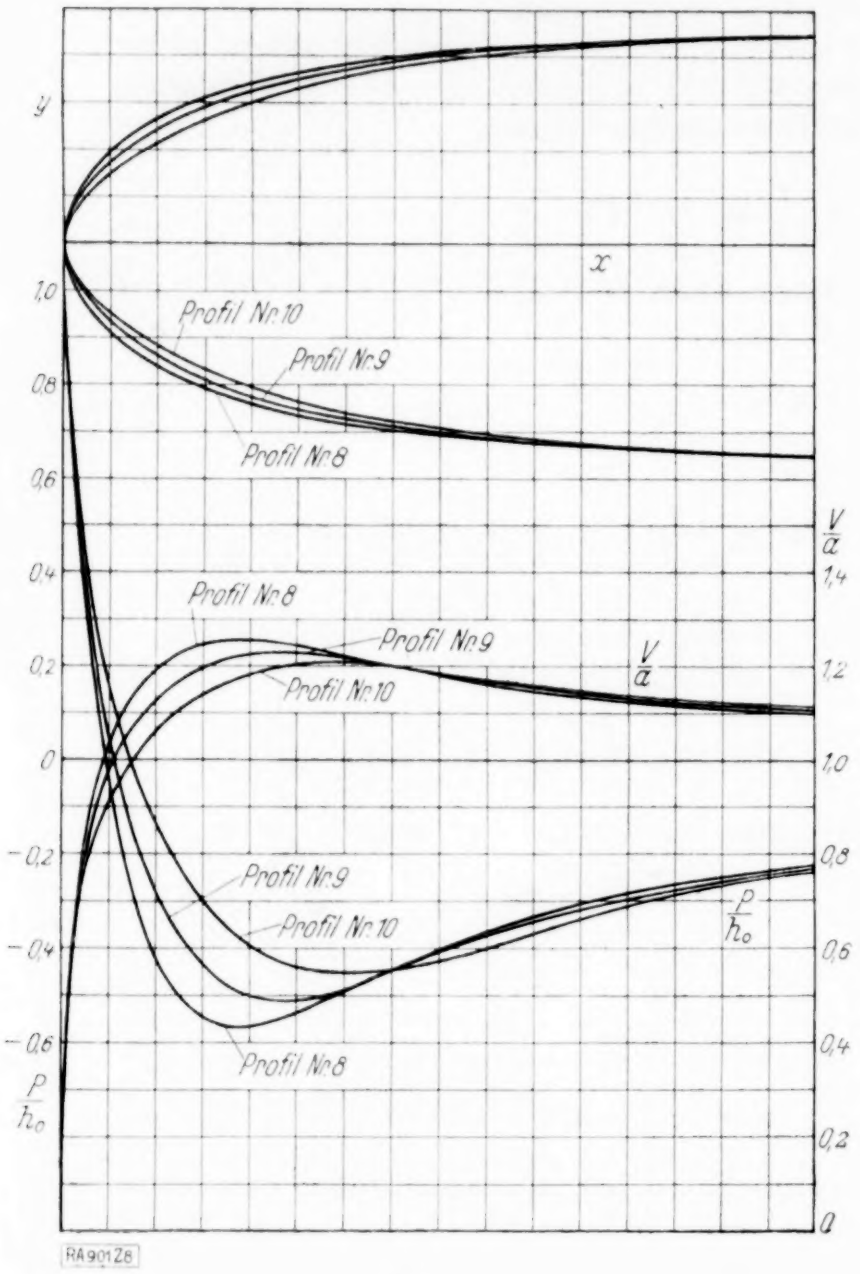


Abb. 8.

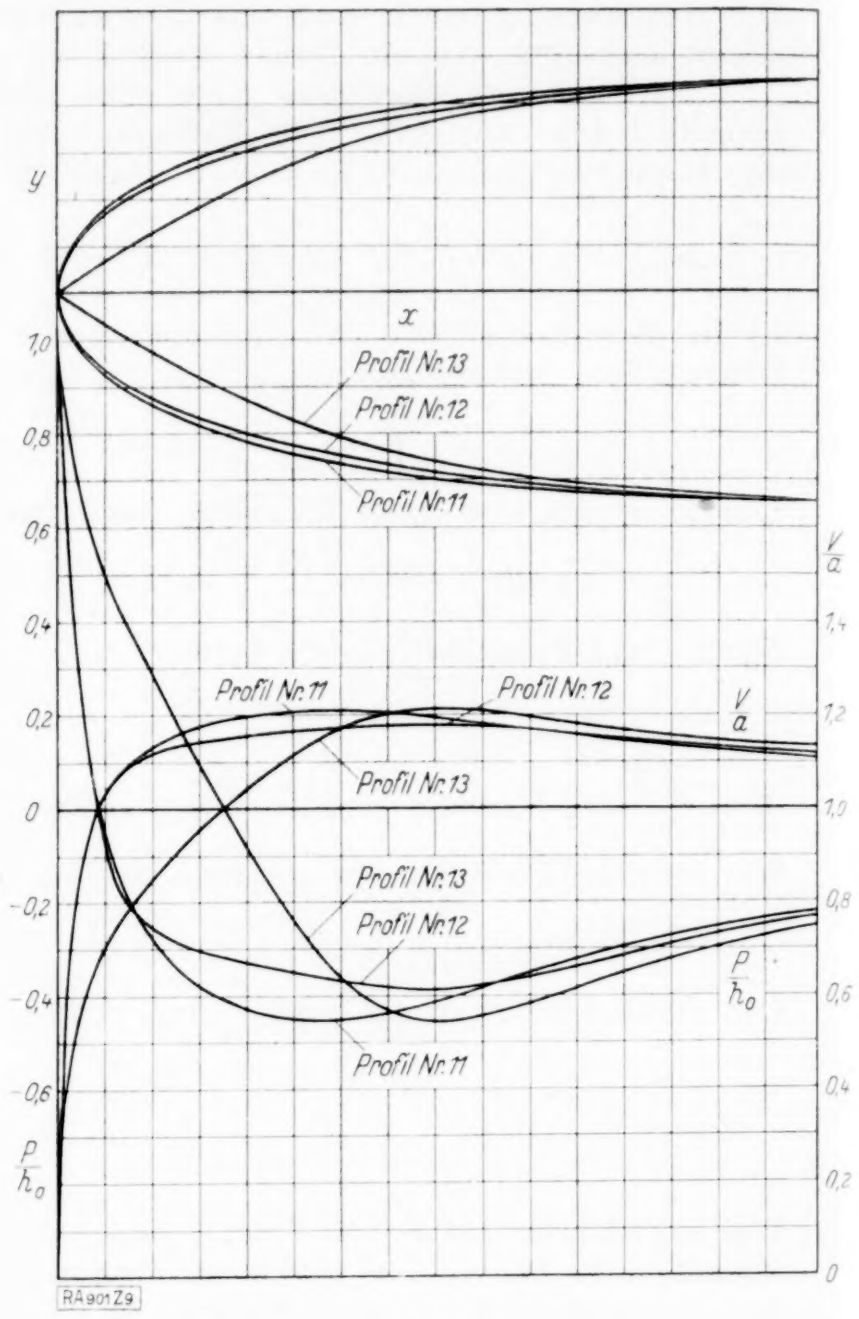


Abb. 9.

Für die Größe des Verhältnisses p/h_0 könnte es noch von Wichtigkeit sein, ob die benachbarten Schaufeln einen größeren Einfluß haben. Um dies zu untersuchen, sind drei punktförmige Quellen in der gegenseitigen Entfernung $e = 10 =$ der fünffachen Profildicke auf der x-Achse angenommen und in der y-Richtung mit der Geschwindigkeit $a = 1$ angeströmt (Abb. 10). Die mittlere Quelle ergibt nun wieder ein symmetrisches Profil. Die Stromfunktion für das System heißt

$$\Psi = a\,x + C\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x+e} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x-e}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Die Geschwindigkeiten

$$c_x = C\left[\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x+e}{(x+e)^2+y^2} + \frac{x-e}{(x-e)^2+y^2}\right], \quad c_y = C\left[\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y}{(x+e)^2+y^2} + \frac{y}{(x-e)^2+y^2}\right] \quad (21).$$

Den Scheitelpunkt für das mittlere Profil erhält man, indem man an der Stelle $x = 0$ die Quellgeschwindigkeit $c_y =$ der Parallelgeschwindigkeit a setzt. Das ergibt für y_0 den Wert $y_0 = 0{,}3199$ gegenüber 0,3185 beim einzelnen punktförmigen Quellenfaden im unendlichen Luftstrom. Der Einfluß der beiden seitlich liegenden Quellen ist also trotz der geringen Entfernung klein. Zum Vergleich ist das Profil auch in Abb. 4 eingetragen. Erst weit hinter der Spitze macht sich eine Abweichung von dem Profil Nr. 1 bemerkbar. Auch das Druckverhältnis p/h_0 ist in beiden Fällen annähernd gleich groß. Da durch die seitlichen Profile beim Profil Nr. 14 ein Geschwindigkeitsausgleich verhindert wird, ist die Geschwindigkeit in

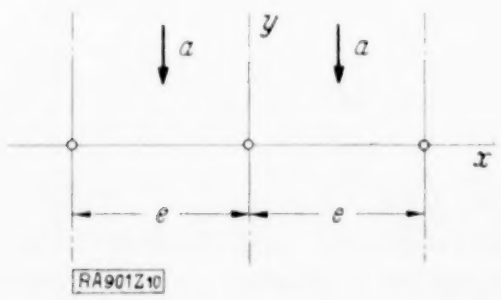


Abb. 10.

einiger Entfernung hinter der Spitze etwas größer. Die Kontur erhält man, indem man den Wert der Stromfunktion für $x = 0$ und $y_0 = 0{,}3199$ ausrechnet. Dieser ist $\Psi = 1{,}5$.

Auch bei der Gitterströmung, bei der also unendlich viele Quellen in der gegenseitigen Entfernung $e = 10$ auf der x-Achse angenommen und in der y-Richtung angeströmt werden, ergeben sich nur sehr geringe Unterschiede gegenüber der einzelnen Quelle im unendlichen Luftstrom. Für diese ergibt sich mit $Q = 2\,x_0 \cdot a$, wo x_0 die Dicke des Profiles im Unendlichen ist, $c_x - i\,c_y = \frac{x_0 \cdot a}{\pi} \cdot \frac{1}{z}$. Beim Gitter wird nun die Dicke x_0 des Profiles im Unendlichen bei gleicher Quellenstärke kleiner $= x_0'$, weil die Geschwindigkeit infolge der Querschnittsverminderung durch die Profile größer wird. Es ist nach Abb. 11 $Q = 2\,x_0' \cdot a'$. Aus der Kontinuitätsgleichung $e \cdot a = (e - 2\,x_0') \cdot a'$ ergibt sich $a' = \frac{e \cdot a}{e - 2\,x_0'}$ und $x_0' = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{\frac{e \cdot a}{Q} + 1} = 0{,}8325\,x_0$.

Für das Gitter ist

$$c_x - i\,c_y = \frac{x_0' \cdot a'}{\pi}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z+e} + \frac{1}{z-e} + \ldots + \frac{1}{z+n\,e} + \frac{1}{z-n\,e}\right].$$

Nun ist $$\operatorname{cotg} z' = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z'+\pi} + \frac{1}{z'-\pi} + \ldots + \frac{1}{z'+n\,\pi} + \frac{1}{z'-n\,\pi}.$$

Setzt man hierin $z' = \frac{\pi \cdot z}{e}$, so ergibt sich

$$c_x - i\,c_y = \frac{x_0' \cdot a'}{e} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{e} \cdot z \quad \ldots \quad (22).$$

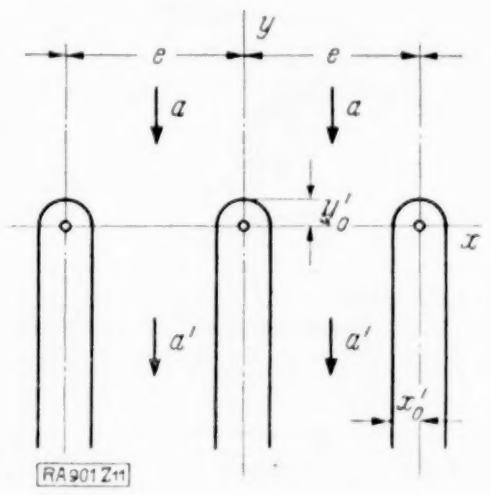


Abb. 11.

Für den Staupunkt ist $c_x = 0$, $x = 0$ daher $c_y = a$, d. h.

$$-i \cdot a = \frac{x_0' \cdot a'}{e} \operatorname{cotg} \frac{i\,\pi}{e} \cdot y'.$$

Ersetzt man hierin a' durch a und setzt man $x_0' = 0{,}8325\,x_0$, $x_0 = 1$ und $e = 10$, so erhält man nach einigen Umrechnungen $y_0' = 0{,}3195$, also auch fast den gleichen Wert wie bei der einzelnen Quelle im unendlichen Luftstrom. Den Einfluß der Gitterströmung auf die Druckverteilung kann man dadurch feststellen, daß man von der Geschwindigkeit infolge des Gitters die infolge der einfachen Quelle abzieht. Die Differenz der beiden ist die Störungsgeschwindigkeit

$$c_x' - i\,c_y' = C\left[\frac{\pi}{e} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{e} z - \frac{1}{z}\right] \quad \ldots \quad (23).$$

Für die Geschwindigkeiten der Gitterströmung bekommt man nach einigen Rechnungen

$$c_{x\,\text{gitter}} = \frac{C}{2} \cdot \frac{\pi}{e} \cdot \frac{\sin 2\frac{\pi}{e} x}{\sin^2 \frac{\pi}{e} x + \mathfrak{Sin}^2 \frac{\pi}{e} y}, \qquad c_{y\,\text{gitter}} = \frac{C}{2} \cdot \frac{\pi}{e} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\frac{\pi}{e} y}{\sin^2 \frac{\pi}{e} x + \mathfrak{Sin}^2 \frac{\pi}{e} y} \quad (24).$$

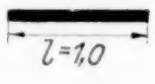
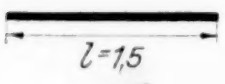
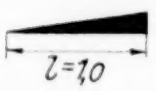
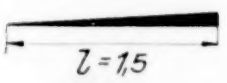
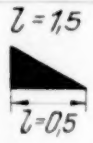
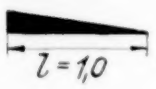
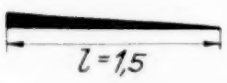
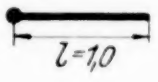
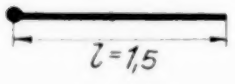
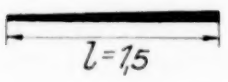
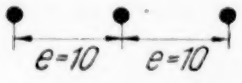
Für den Punkt beim punktförmigen Quellenfaden, wo der größte Unterdruck auftritt, soll die Störungsgeschwindigkeit errechnet werden. Wie Abb. 4 zeigt, haben die drei seitlich in der gegenseitigen Entfernung e angeordneten Quellen nur einen geringen Einfluß auf den Verlauf der Druckkurve, so daß man als gute Annäherung bei der Gitterströmung das Druckminimum ungefähr an derselben Stelle erwarten kann. Die Auswertung zeigt, daß die prozentuale Verringerung der Geschwindigkeit in der x-Richtung beinahe den gleichen Betrag hat wie die prozentuale Vergrößerung in der y-Richtung, ungefähr 2 vH. Infolgedessen wird die Aenderung des Druckes nur unbedeutend sein. Die Strom- und Potentialfunktion für die Gitterströmung heißen noch

$$\chi = C \ln \sin \frac{\pi}{e} z \quad \ldots \quad (25), \qquad \Phi = C \ln\left[\sin \frac{\pi}{e} x\, \mathfrak{Sof} \frac{\pi}{e} y\right] \quad (26),$$

$$\Psi = C \ln\left[\cos \frac{\pi}{e} x\, \mathfrak{Sin} \frac{\pi}{e} y\right] \quad \ldots \quad (27).$$

Einen Vergleich der einzelnen Konturen gibt Tabelle 1. Man sieht, daß für die Größe des Unterdruckes nicht allein die Ausbildung der Spitze maßgebend ist, sondern auch in großem Maße die Form des Profiles hinter der Spitze. So zeigt z. B. Profil

Tabelle 1.

Profil Nr.		$\left(\frac{p}{h_0}\right)_{\min}$	$\frac{x}{2d}$
1	●	— 0,59	0,33
2		— 0,558	0,38
3		— 0,50	0,535
4		— 0,44	0,765
5		— 0,57	0,39
6		— 0,528	0,6
7		— 0,482	0,82
8		— 0,564	0,37
9		— 0,512	0,47
10		— 0,452	0,60
11		— 0,46	0,57
12		— 0,39	0,775
13		— 0,46	0,80
14		— 0,588	0,345

x = Entfernung des Druckminimums von der Vorderkante des Flügels.
$2d$ = Dicke des Flügels im Unendlichen.

Nr. 12, das in bezug auf den Druckverlauf mit $(p/h_0)_{\min} = -0{,}39$ das günstigste ist, an der Spitze ungefähr dieselbe Abrundung wie Nr. 1, wo $(p/h_0)_{\min}$ den Wert $-0{,}59$ hat. Dies ist von großer Wichtigkeit, da bei kleinen Anströmwinkeln, die im praktischen Betrieb immer auftreten, ein spitzes Profil eher zur Kavitation neigen wird als ein abgerundetes. Der Unterschied von 20 vH, wie er bei den beiden Profilen auftritt, kann bei manchen Ausführungen von Wasserturbinen schon von erheblicher Bedeutung sein, da man bei genügender Kenntnis der Vorgänge an der Eintrittskante der Schaufeln die Turbinen bedeutend höher einbauen kann, wie man es sonst der Sicherheit halber machen würde.

2. Ganzprofile. a) Allgemeine Betrachtungen. Normalerweise soll eine Turbinenschaufel die Bedingung erfüllen, daß ein hydrodynamisch stoßfreier Eintritt erzielt wird (Abb. 12). Die Forderung läuft darauf hinaus, die Schaufel so zu gestalten, daß die Verzweigungsstromlinie ohne Knick stetig in die Mittelfläche — das Skelett — der endlich dicken Schaufel übergeht oder mit anderen Worten, daß der Verzweigungspunkt auf die Schaufelmittelfläche fällt. Für den Eintritt ist dies durch richtiges Uebertreiben des Eintrittswinkels unschwer zu erreichen. Es ist jedoch noch die Frage aufzuwerfen, ob selbst bei stoßfreiem Eintritt die Größe des lokalen Unterdruckes allein schon für die Beurteilung der Kavitationsgefahr genügt. Es ist anzunehmen, daß besonders noch die »Empfindlichkeit« $\frac{dp}{d\beta}$ des Unterdruckes p gegenüber den unvermeidlichen Schwankungen $d\beta$ des Anströmwinkels infolge Turbulenz, Ungleichmäßigkeiten des Propellervorstromes oder Regulierungsvorgängen eine gewisse Rolle spielt. Bei der Untersuchung dieser Eigenschaft der Profile muß man jedoch statt der Halbprofile Ganzprofile nehmen. Die Halbprofile erstrecken sich nämlich nach der einen Seite bis zum Unendlichen, und infolgedessen würde bei einem gewissen Anströmwinkel die Geschwindigkeit an der Vorderkante unendlich groß werden müssen.

Abb. 12.

b) Untersuchungen an einer Ellipse. Zunächst soll die schiefwinklige Anströmung bei einer Ellipse betrachtet werden. Nach Lamb heißt die komplexe Strömungsfunktion für die Bewegung einer unbegrenzten Flüssigkeit, die durch einen elliptischen Zylinder mit der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b erzeugt wird, wenn der Zylinder sich parallel zur kleinen Achse bewegt,

$$\chi_1 = \Phi_1 + i\,\Psi_1 = i\,V \cdot a \cdot \varepsilon \cdot e^{-\zeta}\,.$$

Hierin bezeichnet

$$z = x + i\,y = c\,\mathfrak{Cof}\,(\xi + i\,\eta) = c\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \text{Exzentrizität}\,, \qquad \varepsilon = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{1/2}.$$

Die Geschwindigkeiten erhält man durch Differentiation nach z

$$w_1 = \frac{d\chi_1}{dz} = \frac{d\chi_1}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{i \cdot V \cdot a \cdot \varepsilon \cdot e^{-\zeta}}{c \operatorname{Sin} \zeta}.$$

Da $\cos\eta = \frac{x}{c \operatorname{Cof} \xi}$, $\sin\eta = \frac{y}{c \operatorname{Sin} \xi}$ ist, ist $\cos^2\eta + \sin^2\eta = \frac{x^2}{c^2 \operatorname{Cof}^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{Sin}^2 \xi} = 1$.

Die Linien $\xi =$ konst. stellen also Scharen von Ellipsen dar. Setzt man $c \operatorname{Cof} \xi = a$ und $c \operatorname{Sin} \xi = b$, so erhält man schließlich nach einigen Rechnungen für w_1

$$w_1 = -i \cdot V \cdot a \cdot \frac{\cos\eta - i \sin\eta}{b \cos\eta + i a \sin\eta}.$$

Durch Trennung von Realteil und Imaginärteil erhält man die beiden Komponenten der Geschwindigkeit c_{x1} und c_{y1}

$$c_{x1} = -\frac{V \cdot a\,(a+b)}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} \sin\eta \cos\eta, \qquad c_{y1} = \frac{V \cdot a}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} (b \cos^2\eta - a \sin^2\eta).$$

Diese Formeln stellen die Absolutströmung um eine Ellipse dar; um die Relativströmung zu erhalten, muß man noch die Eigenbewegung der Ellipse $c_y' = -iV$ subtrahieren. Die Komponenten der Relativströmung heißen also

$$c_{x1} = -\frac{V \cdot a\,(a+b)}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} \sin\eta \cos\eta, \qquad c_{y1} = \frac{V\,b\,(a+b)}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} \cos^2\eta \quad . \quad (28).$$

Ist die Bewegung parallel zur großen Achse gerichtet, so heißt die komplexe Strömungsfunktion $\chi_2 = U\,b \cdot \varepsilon \cdot e^{-\zeta}$. Auf die gleiche Weise ergibt sich hier die Geschwindigkeit zu

$$w_2 = \frac{d\chi_2}{dz} = \frac{d\chi_2}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{U \cdot b \cdot \varepsilon \cdot e^{-\zeta}}{c \operatorname{Sin} \zeta} = -U\,b\,\frac{\cos\eta - i \sin\eta}{b \cos\eta + i a \sin\eta}$$

die Komponenten der Absolutströmung

$$c_{x2} = -\frac{U\,b}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} (b \cos^2\eta - a \sin^2\eta), \qquad c_{y2} = -\frac{U\,b\,(a+b)}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} \sin\eta \cos\eta$$

und die Komponenten der Relativströmung, wenn man die Eigenbewegung der Ellipse mit $e_{x2}' = -U$ noch berücksichtigt

$$c_{x2} = \frac{U\,a\,(a+b)}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} \sin^2\eta, \qquad c_{y2} = -\frac{U\,b\,(a+b)}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} \sin\eta \cos\eta \quad (29).$$

Um zur schiefwinkligen Anströmung zu kommen, braucht man nur die Komponenten zu addieren. Den absoluten Wert der Geschwindigkeit erhält man dann, indem man bildet

$$|w|^2 = (c_{x1} + c_{x2})^2 + (c_{y1} + c_{y2})^2,$$

$$c_x = c_{x1} + c_{x2} = \frac{a\,(a+b)}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} (U \sin^2\eta - V \sin\eta \cos\eta),$$

$$c_y = c_{y1} + c_{y2} = \frac{b\,(a+b)}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} (V \cos^2\eta - U \sin\eta \cos\eta),$$

$$|w|^2 = \frac{(a+b)^2}{b^2 \cos^2\eta + a^2 \sin^2\eta} (U \sin\eta - V \cos\eta)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Um die Veränderlichkeit des Unterdruckes in Abhängigkeit von dem Verhältnis $V/U = \operatorname{tg}\beta$ zu bekommen, differenziert man den absoluten Wert von $|w|^2$ nach $\operatorname{tg}\beta$

$$\frac{d|w|^2}{d\operatorname{tg}\beta} = \frac{2\,U^2 (a+b)^2 [\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\eta]}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2\eta}.$$

Um η durch β ausdrücken zu können, differenziert man $d|w|^2$ nach $d\eta$ und setzt den Differentialquotienten gleich Null. Man erhält

$$\operatorname{tg}\eta = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Setzt man dies in obige Gleichung ein, erhält man schließlich für $\frac{d|w|^2}{d\operatorname{tg}\beta}$ den Ausdruck

$$\frac{d|w|^2}{d\operatorname{tg}\beta} = \frac{2\,U^2 (a+b)^2}{b^2} \operatorname{tg}\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Das Resultat zeigt, daß bei konstantem U die Schwankungen des Unterdruckes an der Stelle geringsten Druckes direkt proportional $\operatorname{tg}\beta$ sind, da $\frac{2\,U^2 (a+b)^2}{b^2}$ für die Betrachtung eine Konstante ist. Die Folgerung aus diesem Ergebnis ist: Für $\operatorname{tg}\beta = 0$, d. h. für eine

Strömung parallel zur großen Achse liegt das Druckminimum auf der kleinen Achse und hat einen ganz bestimmten Wert, der sich aus obigen Formeln errechnen läßt. Pendelt diese Strömung etwas hin und her — etwa um das Maß, das durch die Turbulenz der Strömung gegeben ist —, so ändert sich der Unterdruck nur wenig, da $\frac{d\,|w|^2}{d\,\mathrm{tg}\,\beta}$ wegen $\mathrm{tg}\,\beta \simeq 0$ nur sehr klein sein kann.

Obschon die Ellipse als Profil wohl kaum praktische Anwendung findet, ist die Erkenntnis dieser Tatsache schon von Bedeutung. Denn bei schiefwinklig angeströmten Schaufeln, die bei stationärer schiefer Anströmung einen gewissen Unterdruck aufweisen, wird sich beim Hin- und Herpendeln der Strömung infolge der Turbulenz ein größerer Unterdruck einstellen als gewöhnlich erwartet wird. Dieser Betrag ist von der Größe des Anstellwinkels abhängig, d. h. im praktischen Betriebe wird sich beim Unter- und Ueberschreiten der normalen Fördermenge eine bedeutende Vergrößerung des größten Unterdruckes einstellen.

c) Verfahren von v. Kármán. Ein Verfahren, die schiefwinklige Anströmung gegebener Körper zu untersuchen, hat Prof. v. Kármán für spindelförmige Körper angegeben. Er zerlegt auch die Strömung in zwei Komponenten, eine mit dem Anströmwinkel Null und eine mit einem Winkel von 90°. Zur Ableitung der Potentialfunktion dieser letzteren benutzt er die Strömung um eine Doppelquelle. Diese besteht aus einer

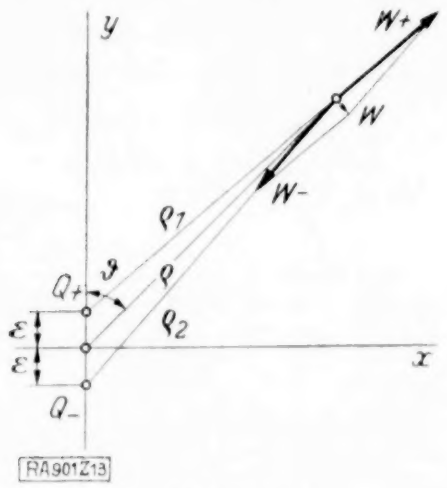


Abb. 13.

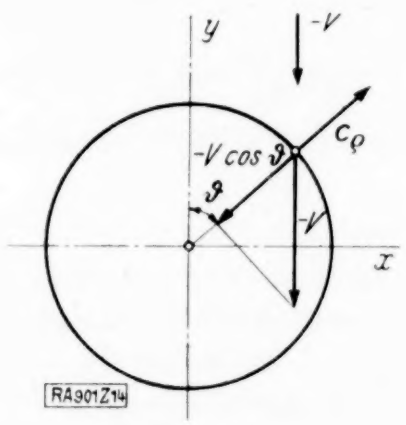


Abb. 14.

Quelle und einer Senke, die beide die gleiche Ergiebigkeit haben und von der x-Achse um ε entfernt sind (Abb. 13). Die Achse der Doppelquelle ist also in der y-Richtung orientiert. Die Potentialfunktion des Doppelquellensystems lautet

$$\Phi = \frac{Q}{2\,\pi}\,(\ln \varrho_1 - \ln \varrho_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Aus Abb. 13 ergibt sich

$$\varrho_1 = \sqrt{\varrho^2 + \varepsilon^2 - 2\,\varepsilon\,\varrho\,\cos\vartheta}\,, \qquad \varrho_2 = \sqrt{\varrho^2 + \varepsilon^2 + 2\,\varepsilon\,\varrho\,\cos\vartheta}\,.$$

Setzt man dies in Gl. (32) ein, erhält man durch Entwicklung nach ε schließlich

$$\Phi = -\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\varrho}\cdot\cos\vartheta\,.$$

Hierin läßt man ε zu Null werden und Q bis unendlich zunehmen, aber so, daß das Produkt $Q\cdot\varepsilon$ einem endlichen Wert »M« zustrebt. Dann wird

$$\Phi = -\frac{M}{\pi\cdot\varrho}\cos\vartheta\,.$$

»M« heißt das Moment der Doppelquelle. Die Strömung ist symmetrisch zur y-Achse. In Richtung der positiven y-Achse strömt die Flüssigkeit aus und von der negativen y-Achse her strömt sie der Doppelquelle zu.

Die Ueberlagerung der Doppelquelle auf eine Parallelströmung in der y-Richtung ergibt die Strömung um einen Kreis (Abb. 14). Die Geschwindigkeitskomponente der Doppelquelle in Richtung des Radius ϱ beträgt

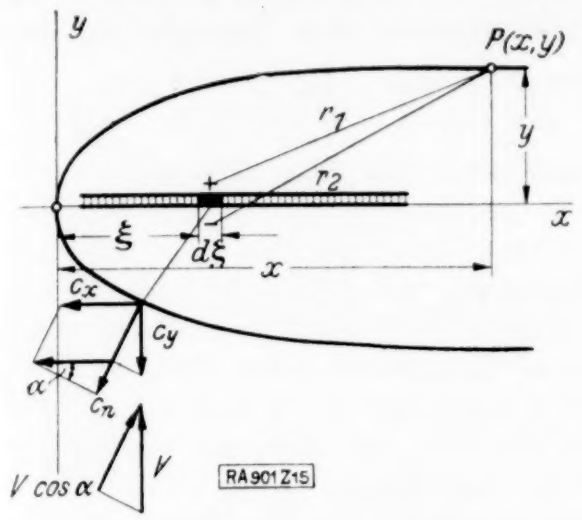
$$c_{\varrho 1} = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\varrho} = \frac{M}{\pi\cdot\varrho^2}\cos\vartheta\,.$$

Die Parallelströmung in der y-Richtung mit der Geschwindigkeit $-V$ liefert eine Komponente in Richtung ϱ vom Betrage

$$c_{\varrho 2} = -V \cos \vartheta .$$

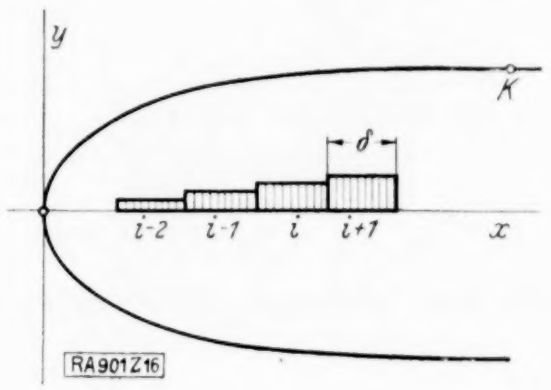
Setzt man nun $c_\varrho = c_{\varrho 1} + c_{\varrho 2} = 0$, so muß auf dem Kreise mit dem Radius ϱ die Geschwindigkeit senkrecht zum Kreise Null werden. Der Radius des Kreises errechnet sich zu

$$\varrho = \sqrt{-\frac{M}{\pi \cdot V}}$$



links: Abb. 15.

rechts: Abb. 16.



Belegt man nun die x-Achse mit Doppelquellen, deren Moment für die Längeneinheit mit $\varkappa(\xi)$ bezeichnet werden soll und überlagert dieser Strömung eine Parallelströmung in der y-Richtung, so wird man die Strömung um ein Profil erhalten (Abb. 15). Die Achsen der Doppelquellen sollen wieder in der y-Richtung orientiert sein. Die Entfernung der Quelle und Senke von der x-Achse betrage jedesmal ε. Dann ist der Beitrag eines solchen Doppelquellenelementes zum Potential eines Punktes $P(x, y)$

$$d\,\Phi = \varkappa(\xi)\, d\,\xi \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}\,\varkappa\,(\xi)\, d\,\xi \ln \frac{(x-\xi)^2 + (y-\varepsilon)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\varepsilon)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Entwickelt man diese Formel in eine Taylorreihe für $\varepsilon = 0$, erhält man

$$d\,\Phi = -\varepsilon \cdot \varkappa\,(\xi) \cdot \frac{2\,y}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\,\xi .$$

$\varepsilon \cdot \varkappa(\xi)$ wird analog dem früheren bei der einfachen Doppelquelle das Moment des Doppelquellenelementes genannt und mit $q(\xi)$ bezeichnet.

Für das gesamte Profil heißt also die Potentialfunktion

$$\Phi = -2\,y \int_{a_1}^{a_2} \frac{q\,(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\,\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Wenn man nun durch Ueberlagerung einer Parallelströmung mit einer Doppelquellenströmung die Kontur erhalten will, muß man erreichen, daß an jeder Stelle der Kontur die Geschwindigkeit senkrecht zu ihr gleich Null wird (Abb. 15). Es muß also sein

$$c_n = c_y \cos \alpha + c_x \sin \alpha = V \cos \alpha ,$$

$$V = c_y + c_x \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Aus Gl. (34) kann man nun die Geschwindigkeitskomponenten c_x und c_y errechnen

$$\left.\begin{aligned} c_x &= \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x} = 4\,y \int_{a_1}^{a_2} \frac{q\,(\xi)\,(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2}\, d\,\xi \\ c_y &= \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y} = -2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{q\,(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\,\xi + 4\,y^2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{q\,(\xi)}{[x-\xi)^2 + y^2]^2}\, d\,\xi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (36).$$

Mit diesen Werten erhält Gl. (35) die Form

$$V = -2 \left\{ \int_{a_1}^{a_2} \frac{q\,(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\,\xi - 2\,y^2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{q\,(\xi)}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2}\, d\,\xi - 2\,y \operatorname{tg} \alpha \int_{a_1}^{a_2} \frac{q\,(\xi)\,(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2}\, d\,\xi \right\} \quad (37).$$

Die Belegung der x-Achse mit Doppelquellen soll nun so erfolgen, daß das Moment der Doppelquellenstrecke für eine bestimmte Länge δ, die für die einzelnen Strecken gleich sein soll, konstant ist, also ungefähr nach Abb. 16.

Die Gl. (37) heißt dann

$$V = -2q(\xi)\left[\int_{-\delta/2}^{+\delta/2}\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} - 2y^2\int_{-\delta/2}^{+\delta/2}\frac{d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2]^2} - 2y\,\mathrm{tg}\,\alpha\int_{-\delta/2}^{+\delta/2}\frac{(x-\xi)\,d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}\right].$$

Bezeichnet man nun die Lage des betrachteten Punktes P mit $k\cdot\delta$ und die Lage der betrachteten Doppelquelle mit $i\cdot\delta$, so heißt das Gleichungssystem zur Berechnung des Doppelquellenmomentes

$$-V/2 = \sum_{i=0}^{i=a} q_i g_{ik} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38),$$

g_{ik} ist hierin das Integral

$$g_{ik} = \int_{(i-1/2)\delta}^{(i+1/2)\delta}\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} - 2y^2\int_{(i-1/2)\delta}^{(i+1/2)\delta}\frac{d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2]^2} - 2y\,\mathrm{tg}\,\alpha\int_{(i-1/2)\delta}^{(i+1/2)\delta}\frac{(x-\xi)\,d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}.$$

Mit den Lösungen dieser Integrale erhält man für g_{ik}

$$g_{ik} = \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+y^2} - y\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{(x-\xi)^2+y^2}\Bigg|_{(i-1/2)\delta}^{(i+1/2)\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39).$$

Die Auswertung der Gl. (38) ist jedoch recht umständlich, da die Werte für g_{ik} sehr schlecht gegen Null konvergieren, d. h. auch die weit vom Punkte $P(x, y)$ entfernt liegenden Doppelquellenelemente haben noch einen merkbaren Einfluß auf das Potential des Punktes. Dies ist auch sehr leicht einzusehen. Im Gegensatz zu den spindelförmigen Körpern, die die Flüssigkeit umströmen kann, muß bei den ebenen Profilen, die sich in der einen Achse bis ins Unendliche erstrecken, sämtliche Flüssigkeit an der Vorder- bzw. an der Hinterkante vorbeifließen. Die Länge des Profiles wird also einen großen Einfluß auf die Geschwindigkeit an der Spitze haben. Damit ist auch bei langen Profilen der Einfluß der entfernt liegenden Doppelquellenelemente auf das Potential eines Punktes erklärt. Aus diesem Grunde wurde auf eine Benutzung der entwickelten Methode verzichtet und zur Klärung der Verhältnisse bei seitlicher Anströmung ein Näherungsverfahren eingeschlagen.

d) Verfahren der konformen Abbildung. Um den Einfluß der Abrundung der Vorderkante eines Profiles bei gleicher Länge und Dicke desselben auf die Größe des maximalen Unterdruckes zu untersuchen, muß auf die konforme Abbildung eines Kreises zurückgegriffen werden. Joukowski und Kutta haben schon gezeigt, daß man mit den Methoden der klassischen Hydrodynamik bestimmte Profile berechnen kann. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß sich mit Hilfe der Funktionentheorie beliebige Flächenprofile berechnen und untersuchen lassen. Bieberbach hat aus der Theorie der komplexen Funktionen folgenden Satz aufgestellt. Sei in der ζ-Ebene eine geschlossene Kurve ohne Doppelpunkt gegeben, die einen einfach zusammenhängenden Bereich begrenzt, dann gibt es stets nur eine schlichte Abbildung von der Form

$$z = \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40),$$

wo a_1, a_2, a_3 . . . im allgemeinen komplexe Konstanten bedeuten, durch die der Außenraum des gegebenen Bereichs auf den Außenraum eines Kreises der z-Ebene abgebildet wird. Durch das in der ζ-Ebene gegebene Profil werden also die Konstanten $a_1, a_2, \ldots$ sowie die Größe und Lage des Kreises in der z-Ebene bestimmt. Für hinreichend große Werte von ζ geht Gl. (40) asymptotisch in $z = \zeta$ über. Bei der Abbildung bleibt also das unendlich Ferne unverändert. Man kann folglich den Satz auch dahin aussprechen, daß es immer nur eine Abbildung gibt, die das unendlich Ferne unverändert läßt und den ganzen Außenraum eines Profiles in den eines Kreises überführt. Zugleich ist dadurch erklärt, woher die Beschränkung herrührt, daß der Kreis, in den transformiert wird, nicht mehr willkürlich gewählt werden kann, sondern durch das gegebene Profil schon bestimmt ist. Die Bedingung, daß das unendlich Ferne unverändert bleiben soll, bestimmt den Kreis nach Größe und Lage eindeutig.

Joukowski und Kutta haben sich mit dem besonderen Fall beschäftigt, in dem die Reihe (40) aus der Umkehrung der Beziehung

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

hervorgeht, wo c eine reelle Zahl ist. Der Kreis geht dabei durch den Punkt B $(z = -c)$ (Abb. 17), der in die spitze Hinterkante des Profiles übergeht. Diese sind gekennzeichnet durch folgende Größen:

1. durch $M'O = {}^1/_2 f =$ der halben Pfeilhöhe des Kreisbogens, der durch Abbildung des mit M' als Mittelpunkt konstruierten Kreises entstehen würde;
2. durch die Radiendifferenz $MM' = \delta$, die ein Maß für die Dicke des Profiles gibt.

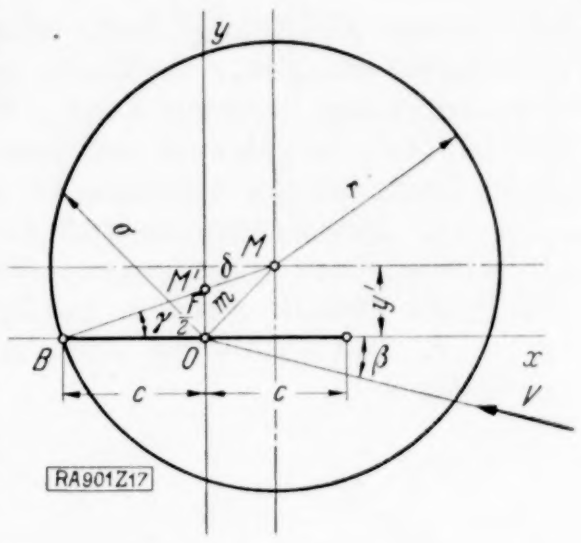


Abb. 17.

Es soll nun die Geschwindigkeits- und Druckverteilung untersucht werden, die eine im Unendlichen mit der Geschwindigkeit V unter dem Winkel β gegen die positive ξ-Achse vor sich gehende Strömung längs des Profiles erzeugt. Die absolute Geschwindigkeit rechnet sich nach bekannten Methoden folgendermaßen. Das komplexe Potential einer Strömung um einen Kreiszylinder, der mit der Geschwindigkeit V unter dem Anströmwinkel β angeblasen wird (Abb. 17), heißt

$$\chi_1 = V\left(z' + \frac{r^2}{z'}\right),$$

worin $z' = (z - m)\, e^{i\beta}$ ist. Da im allgemeinen an der spitzen Hinterkante eines Flügels, in den der Kreis bei der Abbildung übergeht, eine unendliche Geschwindigkeit auftreten wird, muß man zu der Parallelströmung noch eine Zirkulationsströmung hinzufügen, deren Wert sich dadurch bestimmt, daß an der Hinterkante ein glattes Abströmen erreicht wird. Da diese beim Kreis aus einfachen Kreisen besteht, nimmt die komplexe Strömungsfunktion die Gestalt an

$$\chi_2 = \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \ln z'.$$

Die Gesamtströmung ergibt sich durch additive Zusammensetzung zu

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 = V\left(z' + \frac{r^2}{z'}\right) + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \cdot \ln z'.$$

Um die analoge Strömung um ein Profil zu erhalten, bildet man den Kreis durch die konforme Abbildung $\zeta = z + \frac{c^2}{z}$ auf ein Profil ab. Die Geschwindigkeit errechnet sich dann zu

$$w = \frac{d\chi}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}.$$

An der Hinterkante des Profiles für $z = -c$ wird nun $\frac{dz}{d\zeta} =$ unendlich. Einen endlichen Wert für die Geschwindigkeit kann man nur dadurch erreichen, daß man $\frac{d\chi}{dz'}$ an dem Punkte B, dessen Verbindungslinie mit dem Kreismittelpunkte M den Winkel γ bildet, gleich Null setzt, da $\frac{dz'}{dz} = 1$ ist. $z - m$ wird gleich $-r\,e^{i\gamma}$ und damit $z' = -r\,e^{i(\beta+\gamma)}$. Für Γ ergibt sich der Wert

$$\Gamma = 4\,\pi \cdot r \cdot V \sin(\beta + \gamma),$$

und die Gleichung für die Gesamtströmung bekommt die Form

$$\chi = V\,[z' + r^2/z' + 2\,r \sin(\beta + \gamma) \ln z'].$$

Der absolute Wert der Geschwindigkeit ist nun

$$|w| = \left|\frac{d\chi}{dz'}\right| \cdot \left|\frac{dz'}{dz}\right| \cdot \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|.$$

Hierin ist

$$\left|\frac{d\chi}{dz'}\right| = \frac{2\,V}{r}\,[(x + c)\sin\beta + (y + y')\cos\beta], \qquad \left|\frac{dz'}{dz}\right| = 1,$$

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2)^2 + 4\,c^2 y^2}}, \text{ wo } \sigma^2 = x^2 + y^2 \text{ ist} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Mit diesen Ausdrücken wird

$$w = \frac{2\,V}{r} \cdot \frac{\sigma^2\,[(x+c)\sin\beta + (y+y')\cos\beta]}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2)^2 + 4\,c^2\,y^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Mit dieser Abbildung kann man jedoch bei vorgegebener Länge und Dicke nur eine Profilform erhalten. v. Mises gibt nun einen Weg an, wodurch man sich von dieser Einschränkung befreien kann. Er geht davon aus, daß die Umkehrung jeder Abbildung der Gl. (40), angewandt auf einen Kreis, wenn nur die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, ... gewisse Bedingungen erfüllen, zu einem Profil führen muß. Die Bedingungen sind:

1. Die Kreislinie muß durch die Abbildung in eine einfach geschlossene, doppelpunktfreie Kurve übergehen, die den allgemeinen, gestaltlichen Anforderungen, die an ein Profil gestellt werden, genügt.

2. Die Abbildung muß im ganzen Außenraum des Kreises schlicht, d. h. umkehrbar eindeutig sein.

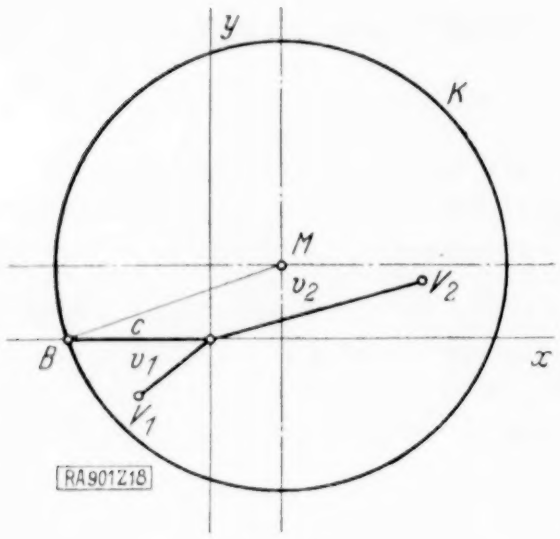


Abb. 18.

3. Einem Punkte des Kreises muß eine Spitze oder Ecke des Profils entsprechen. Die Bedingung 3 erledigt sich dadurch, daß man an dieser Stelle die Ableitung $\frac{d\zeta}{dz}$ verschwinden läßt, wodurch eine Bedingung für die Koeffizienten gegeben ist. Die erste Bedingung kann man nicht anders erledigen, als daß man das Profil tatsächlich aufzeichnet. Dies ist von größter Wichtigkeit, denn bei der zur Dicke verhältnismäßig großen Länge der Profile bei Turbinenschaufeln wird man finden, daß die geforderte Doppelpunktfreiheit der Kurve eine große Einschränkung der Anwendbarkeit des Verfahrens bedeutet. v. Mises gibt eine graphische Methode an, die ein schnelles Aufzeichnen der Profile gestattet. Ist durch die Konstruktion bewiesen, daß bei der Abbildung der Profilumriß als Bild des Kreises doppelpunktfrei wird, erledigt sich die Bedingung 2 leichter. Nach Bieberbach gilt nämlich der Satz: Sei die Umkehrung von

$$z = \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \ldots, \qquad \zeta = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \ldots$$

eine Abbildung, die den Kreis $(z - m) = r$ in eine einfach geschlossene, doppelpunktfreie Linie überführt und liegen die Nullstellen von $\frac{d\zeta}{dz}$ alle im Inneren des Kreises bis auf eine, die auf der Peripherie selbst liegt, dann ist die Abbildung im ganzen Außenraum schlicht, wenn der Anfangspunkt $z = 0$ ins Innere des Kreises fällt. Das Koordinatenkreuz in der z-Ebene wird nun so gelegt, daß der Kreispunkt B (Abb. 18), der in die Profilspitze übergeht, die negative Abszisse $-c$ und die Ordinate 0 hat. Durch diesen Punkt, $z = -c$, muß also der Kreis, der das Profil ergeben soll, hindurchgehen, während er den Punkt $z = 0$ in seinem Innern umschließt. Die Abbildungsfunktion setzt man nun an

$$\zeta = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \ldots \frac{c_n}{z^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Die Ableitung dieser Funktion heißt

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2\,c_2}{z^3} - \frac{3\,c_3}{z^4} - \ldots - \frac{n\,c_n}{z^{n+1}}$$

Die rechte Seite kann in ein Produkt von $(1 + n)$ Faktoren der Form $(1 - v/\zeta)$ entwickelt werden, wobei eines der v den Wert $-c$ haben muß, während die Gesamtheit der v die Bedingung erfüllen muß, daß ihre Summe verschwindet, damit im Produkt das Glied $1/\zeta$ verschwindet.

Wählt man nun im Innern des Kreises K gelegene Punkte V_1, V_2, V_3 ..., so, daß sie der Bedingung $v_1 + v_2 + v_3 \ldots + v_n = c$ genügen, so kann man daraus die Werte für $c_1, c_2, \ldots c_n$ bestimmen. Es ist

$$\left(1 + \frac{c}{z}\right)\left(1 - \frac{v_1}{z}\right)\left(1 - \frac{v_2}{z}\right)\ldots\left(1 - \frac{v_n}{z}\right) = 1 - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2\,c_2}{z^3} - \ldots - \frac{n\,c_n}{z^{n+1}} \quad (45).$$

Durch Gleichsetzen gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten kann man nun $c_1, c_2, \ldots c_n$ errechnen. Man erreicht dadurch, daß der Punkt B $(z = -c)$ in eine Spitze übergeht,

daß alle Verzweigungspunkte im Innern des Kreises liegen und daß die Abbildungsfunktion die Form der Gl. (44) hat. Es wurde nun versucht, mit einem Ansatze vom Grade $n = 2$ die Gestalt des Profilkopfes zu variieren. Die Gl. (45) nimmt dann die Form an

$$\left(1 + \frac{c}{z}\right)\left(1 - \frac{v_1}{z}\right)\left(1 - \frac{v_2}{z}\right) = 1 - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2\,c_2}{z^3},$$

womit sich

$$c_1 = c^2 - v_1\,v_2\,, \qquad c_2 = -\frac{c}{2}\,v_1\,v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

errechnet. Der größeren Genauigkeit halber wurden die Konturen und die Geschwindigkeiten am Profilkopf rechnerisch ermittelt, da es schwierig ist, zeichnerisch eine genügend große Genauigkeit zu erreichen. Da c_1 und c_2 im allgemeinen komplexe Größen sein werden, kann man dafür setzen

$$c_1 = a + i\,b\,, \qquad c_2 = c + i\,d\,.$$

Die Koordinaten der Profilpunkte ergeben sich zu

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x + \frac{a\,x}{x^2+y^2} + \frac{b\,y}{x^2+y^2} + \frac{c\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2\,d\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}\\ \eta &= y - \frac{a\,y}{x^2+y^2} + \frac{b\,x}{x^2+y^2} - \frac{2\,c\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{d\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Der absolute Wert $\frac{d\,\zeta}{d\,z}$ mit $\sigma = x^2 + y^2$ zu

$$\left|\frac{d\,\zeta}{d\,z}\right| = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\sigma^2 + a^2 + b^2 - 2\,a\,(x^2-y^2) - 4\,b\,x\,y + \frac{4}{\sigma}\,[c^2 + d^2 + x\,(a\,c + b\,d) + y\,(a\,d - b\,c) - c\,(x^3 - 3\,x\,y^2) - d\,(3\,x^2\,y - y^3)]} \quad . \quad . \quad (48).$$

Für Schaufelprofile von Kreiselrädern kommen nur reelle Werte von c_1 und c_2 in Frage, da komplexe Werte ein Aufbiegen des Profiles am hinteren Ende zur Folge haben. Die Werte b und d werden also gleich Null. Setzt man noch gleichzeitig a wieder gleich c_1 und c gleich c_2, so erhalten die Formeln (47) und (48) die Form

$$\xi = x + \frac{c_1\,x}{x^2+y^2} + \frac{c_2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad \eta = y - \frac{c_1\,y}{x^2+y^2} - \frac{2\,c_2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} \quad . \quad . \quad (47a),$$

$$\left|\frac{d\,\zeta}{d\,z}\right| = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\sigma^2 + c_1^{\,2} - 2\,c_1\,(x^2-y^2) + \frac{4}{\sigma}\,[c_2^{\,2} + x\,c_1\,c_2 - c_2\,(x^3 - 3\,x\,y^2)]} \quad (48a).$$

Eine weitere Möglichkeit, die Form des Profilkopfes bei gleichbleibender Länge und Dicke des Profiles zu variieren, ist durch die Abbildungsfunktion von v. Kármán und Trefftz gegeben. Diese stellt eine Erweiterung des Joukowskischen Falles insofern dar, als der Spitzenwinkel, der bei Joukowski gleich Null ist, einen endlichen Wert bekommt. Man kann die Joukowskische Abbildungsfunktion (41), indem man einmal $2\,c$ addiert und einmal $2\,c$ subtrahiert und daraus den Quotienten bildet, auf die Gestalt

$$\frac{\zeta - 2\,c}{\zeta + 2\,c} = \left(\frac{z-c}{z+c}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

bringen. Man ersieht daraus sofort, daß der durch B und B_1 gehende Kreis in der z-Ebene ein doppelt durchlaufener Kreisbogen durch die Punkte $\zeta = +2\,c$ und $\zeta = -2\,c$ in der ζ-Ebene werden muß mit dem doppelten Peripheriewinkel, wie aus der Quotientbildung zweier komplexen Zahlen hervorgeht (Abbild. 19). Man kann nun Gl. (49) sehr einfach dadurch abändern, daß das gegenseitige Entsprechen gewisser Kreisbögen gewahrt bleibt, ohne daß aber dem Vollkreis durch $B\,B_1$ zweimal derselbe Kreisbogen entspricht. Setzt man nämlich

$$\frac{\zeta - c'}{\zeta + c'} = \left(\frac{z-c}{z+c}\right)^n \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

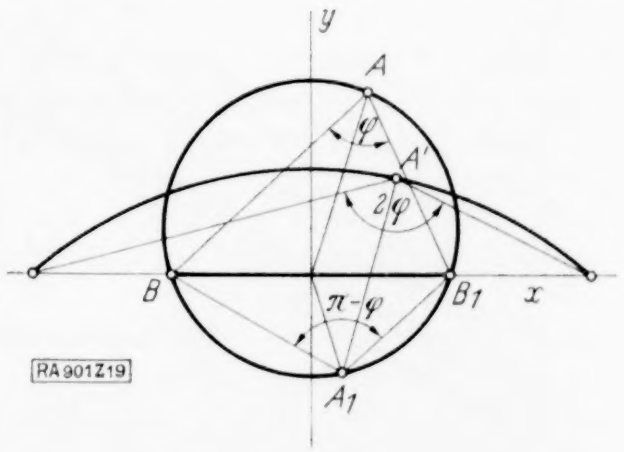


Abb. 19.

wo c' eine noch zu bestimmende Konstante und n ein von 2 verschiedener Exponent ist, so entspricht jedem Kreisbogen durch $B\,B_1$ ein Kreisbogen durch $\zeta = \pm c'$ mit dem n-fachen Peripheriewinkel. Die Bögen, die den beiden Teilen des Kreises durch B und B_1 entsprechen, haben also Peripheriewinkel, die um $n\,\pi$ voneinander verschieden sind;

sie schneiden sich unter einem Winkel $\pm (n-2)\,\pi$, falls n wenig größer oder kleiner als 2 ist. Die Konstante c' bestimmt sich dadurch, daß das unendlich Ferne in beiden Ebenen identisch sein muß. Kürzt man in Gl. (50) Zähler und Nenner durch z bzw. ζ und entwickelt man nach $1/z$ bzw. $1/\zeta$, so erhält man

$$1 - \frac{2\,c'}{\zeta} - \ldots = 1 - \frac{2\,n\,c}{z} - \ldots .$$

Soll also im Unendlichen $\zeta = z$ werden, muß $c' = n\,c$ werden. Gl. (50) erhält damit die Form

$$\frac{\zeta - n\,c}{\zeta + n\,c} = \left(\frac{z-c}{z+c}\right)^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50\,\mathrm{a}).$$

Auch hier wurde der größeren Genauigkeit wegen der rechnerische Weg zur Bestimmung der Kontur und der Geschwindigkeit beschritten. Die notwendigen Gleichungen lauten

$$\xi = n\,c\,\frac{r_1^{2n} - r_2^{2n}}{r_1^{2n} + r_2^{2n} - 2\,r_1^n\,r_2^n \cos n\,(\varphi_1 - \varphi_2)}, \qquad \eta = n\,c\,\frac{2\,r_1^n\,r_2^n \sin n\,(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_1^{2n} + r_2^{2n} - 2\,r_1^n\,r_2^n \cos n\,(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (51),$$

$$\left|\frac{d\,\zeta}{d\,z}\right| = \frac{4\,n^2\,c^2\,(r_1\,r_2)^{n-1}}{r_1^{2n} + r_2^{2n} - 2\,r_1^n\,r_2^n \cos n\,(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \ldots \ldots \quad (52).$$

Hierin ist $r_1\,e^{i\,\varphi_1} = z + c\,, \qquad r_2\,e^{i\,\varphi_2} = z - c\,.$

In Abb. 20 sind nun die Köpfe der Profile, die nach diesen Verfahren errechnet wurden, aufgezeichnet. Um einen Vergleich zu gestatten, mußten die einzelnen Profile gleiche Länge und Dicke haben. Das kann man nur dadurch erreichen, daß man die kennzeichnenden Größen für die einzelnen Abbildungen durch Probieren festlegt. Die Druckverhältnisse sind nur an der Saugseite untersucht, weil nur dort Ablösungserscheinungen auftreten können, und nur für kleine Winkel $\beta = 0^0, 2^0, 4^0, 6^0$ und 8^0, wie sie bei Turbulenz- und Regulierungserscheinungen auftreten. Abb. 20 läßt deutlich den Wert einer richtigen Abrundung der Vorderkante erkennen. Es ist die Größe des

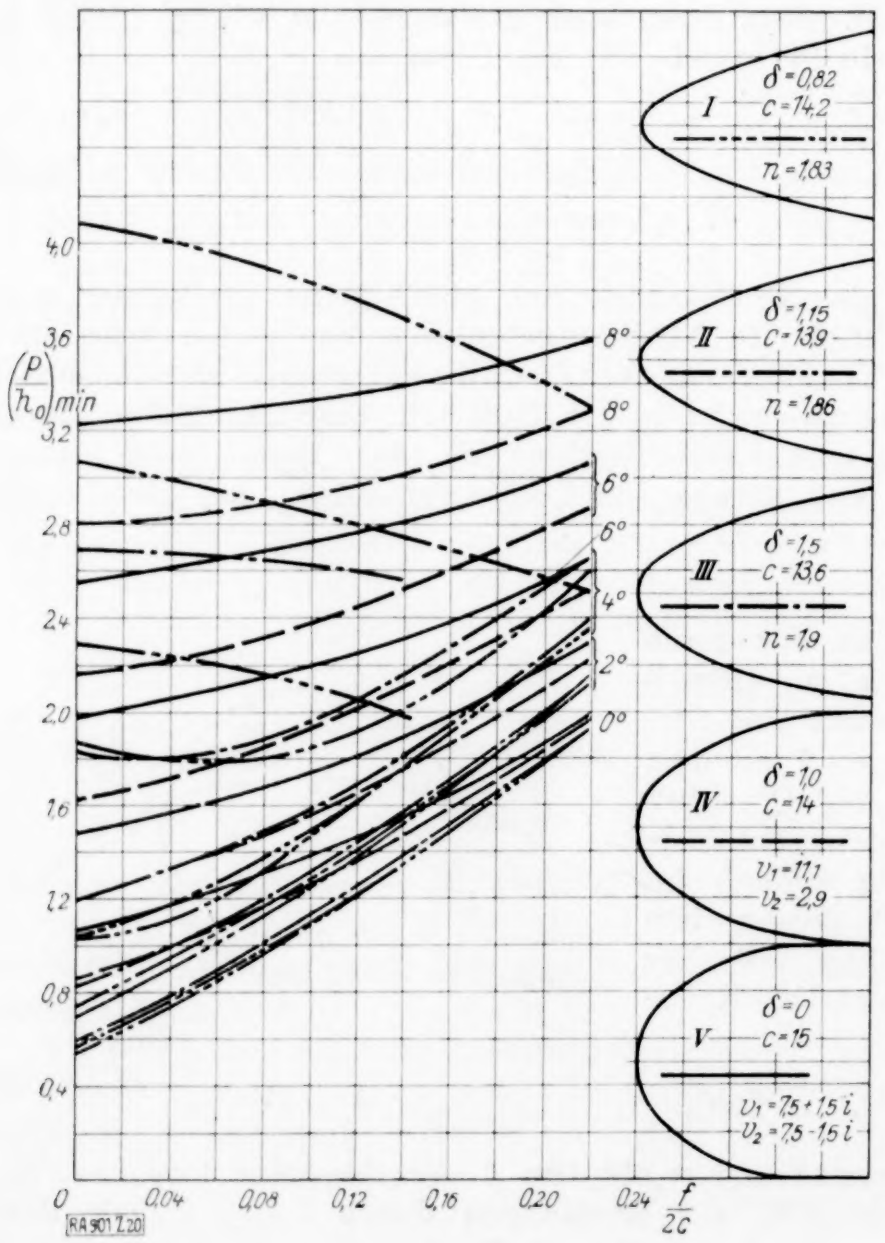


Abb. 20.

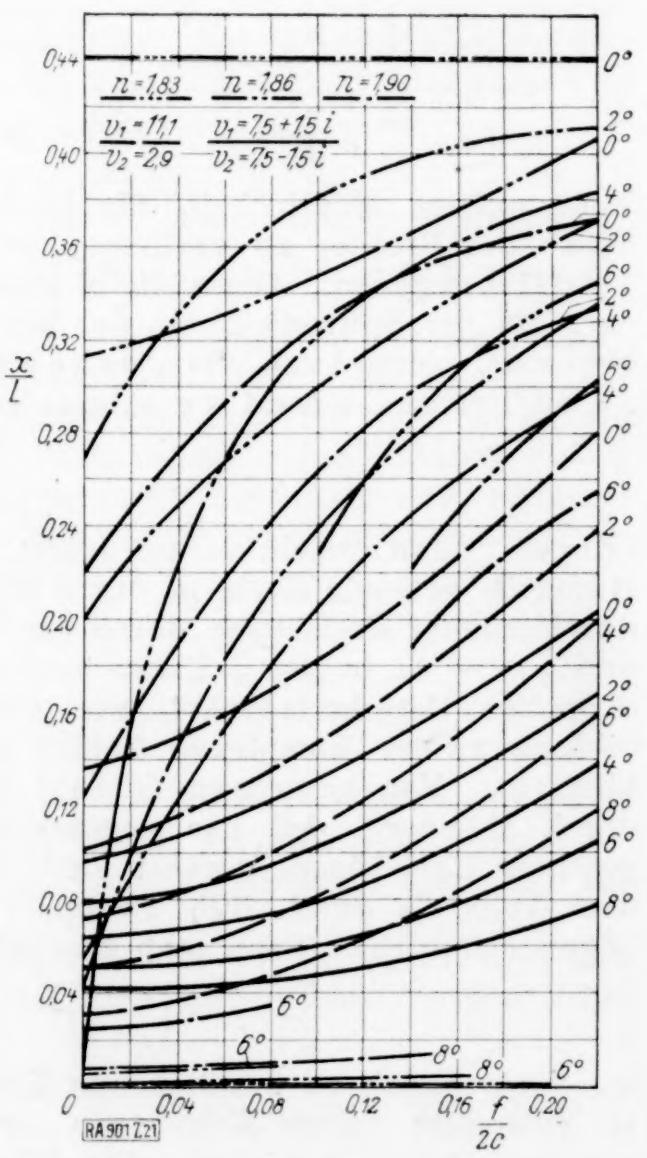


Abb. 21.

Unterdruckes $\left(\frac{p}{h_0}\right)_{\min}$ in Abhängigkeit von dem Verhältnis $\frac{f}{2c}$ für die verschiedenen Profile und Anströmwinkel aufgetragen. Das Verhältnis $f/2c$ — die Bedeutung der Größen ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich — gibt ein Maß für die Krümmung der Profile. Die Kurven zeigen, daß sich die Abrundungen I, II und III für die Winkel $\beta = 0^0$ und 2^0 ziemlich gleich verhalten, besonders bei größeren Verhältnissen $f/2c$, die überhaupt eine Verminderung des Einflusses der Ausbildung der Schaufelvorderkante zur Folge haben. Für $\beta = 6^0$ ergibt sich, daß die Abrundung I für diese Winkel schon zu klein ist. Die Kurve zeigt eine andere Tendenz. Diese ist bedingt durch die bei diesem Winkel auftretenden Unterdruckspitzen, die den sonst auftretenden Unterdruck beträchtlich überragen. Bei Profil II und III treten diese erst bei $\beta = 8^0$ auf und auch hier in geringerem Maße wie bei I. Das Profil III ist das mit der günstigsten Abrundung der Vorderkante. Zu dem gleichen Resultat kommt man bei der Betrachtung der Abb. 21, wo die Abhängigkeit der Lage des Druckminimums x/L (L = Gesamtlänge des Profiles) von dem Verhältnis $f/2c$ bei den verschiedenen Anströmwinkeln aufgetragen ist. Auch hier wechselt die Tendenz der Kurve, sobald sich Anzeichen bemerkbar machen, daß die Druckkurve eine Spitze hat. Je spitzer das Profil, desto schneller rückt bei schiefer Anströmung das Unterdruckminimum zur Vorderkante, um beim ausgeprägten Auftreten einer Spitze dauernd in ihrer Nähe zu sein. Die Konturen IV und V kommen für praktische Ausführungen auch nicht in Frage, da bei jedem Anströmwinkel die Unterdrucke schon bedeutend höher sind als bei Profil III.

Vergleicht man nun die errechneten Halb- und Ganzprofile, so sieht man, daß die Kontur Nr. 12, die bei den Halbprofilen als günstigste erkannt wurde, an der Vorderkante genau mit dem Ganzprofil III übereinstimmt, das in bezug auf die Druckverteilung bei kleinen Anströmwinkeln die günstigsten Resultate liefert. Bedenkt man nun noch, daß die Wasserturbinenschaufeln eben mit Rücksicht auf die auftretenden Unterdrucke auf der Saugseite nur eine geringe Krümmung aufweisen dürfen, die wegen ihrer Kleinheit sogar gestatten dürfte, den ersten Teil der Schaufel als Halbprofil mit gerader Achse aufzufassen, so würde eine Ausbildung des Schaufelkopfes nach Profil Nr. 12 als zweckmäßig erscheinen. Die richtige Abrundung der Vorderkante gewährleistet, wie Abb. 20 und 21 zeigen, daß bei den durch die Turbulenz- und Regulierungserscheinungen bedingten kleinen Anströmwinkeln keine gefährlichen Unterdruckspitzen auftreten, während die Ausbildung hinter der Spitze einen möglichst flachen Verlauf des Unterdruckes auch bei dem normalen stoßfreien Eintritt verbürgt. 901

Die Beeinflussung von Grenzschichten durch Temperaturfelder.

Von **J. SCHMEKEL** in Greifswald.

In einer früheren Arbeit[1]) war die Störung der erzwungenen Kühlung durch die freie berechnet worden. Hierbei konnten die Stromlinien der freien Konvektionsströme ohne Beschränkung die erzwungene Strömung stören. Dort war schon angedeutet, daß man diese Erscheinung auch vom Standpunkt der Prandtlschen Grenzschichttheorie ansehen kann. Wir werden diese Erklärung immer dann bevorzugen, wenn die Einwirkung sich nur auf das Gebiet der Grenzschicht erstreckt, ohne daß erhebliche Massentransporte durch Dichteunterschiede bis zum Kern der Flüssigkeitsströmung hindurchdringen. Die Erscheinung, die zunächst damit erklärt werden sollte, war kurz die, daß unter gleichen äußeren Strömungsbedingungen die Wärmeübertragung von der Wand an die Flüssigkeit schwerer erfolgt als umgekehrt, was ich auf eine Veränderung der Grenzschichtdicke durch das Temperaturfeld zurückführte.

Im folgenden will ich nun genauer dieses Problem behandeln und — soweit möglich — mit den vorliegenden Experimenten vergleichen. Diese wurden von Stanton[2]), Soennecken[3]) und Stender[4]) an Rohren in Wasser gemacht. Es handelt sich hierbei um eine kleine Weiterbildung der von Prandtl bzw. v. Kármán aufgestellten Sätze, die schon von Latzko[5]) benutzt wurden. Dieser vernachlässigt aber von vornherein eine

[1]) J. Schmekel, Zeitschr. f. techn. Phys. Bd. 9 (1928), S. 49.
[2]) Stanton, Trans. Roy. Soc. Lond. (A) 190, 67, 1897.
[3]) Soennecken, Dissertation Techn. Hochschule München.
[4]) Stender, Wärmeübergang, Berlin 1923.
[5]) Latzko, Diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 268.

Abkühlung, die auf Grund von freien Konvektionsströmen einsetzt. Wir beschränken uns zunächst auf die Abkühlung eines heißen Rohres. Hieran sind von Nußelt die Unterschiede der beiden Kühlungen Wand — Flüssigkeit und umgekehrt zusammengestellt.

1. Wärmeabgabe eines heißen Rohres an eine kalte Flüssigkeit bei axialem Strom. Wir beabsichtigen im folgenden keine Neudurchrechnung des gesamten von Latzko bereits behandelten Problems, sondern beschränken uns auf die Veränderungen der Grenzschicht der Anlaufstrecke. Dies wird den experimentellen Verhältnissen am besten entsprechen. Eine Berechnung der gemessenen Wärmeabgabe liegt nicht im Rahmen der Arbeit, da die grundlegenden Impulsbetrachtungen noch nicht auf tropfbare Flüssigkeiten übertragen wurden. Wir ergänzen also den Latzkoschen Ansatz und schreiben:

$$\frac{dJ}{dz} - \varrho U \frac{dQ}{dz} = -\frac{dp}{dz}(2r\delta - \delta^2)\pi - \pi r \tau_0 + \tau \cdot \pi \cdot r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hierin bedeuten, wie bei Latzko:

Q = das durch den Querschnitt der Grenzschicht sekundlich strömende Volumen,
J = den sek. Transport von Impuls der Stromrichtung durch die Querschnittsfläche,
U = Geschwindigkeit der ungestörten Strömung,
u = Geschwindigkeit in der Grenzschicht,
v = mittlere Geschwindigkeit über den Querschnitt,
δ = Dicke der Grenzschicht,
r = Radius des Rohres,
y = Abstand von der Rohrwand,
z = Koordinate der Stromrichtung,
p = Druck,
τ_0 = Schubspannung an der Wand,
ϱ = Dichte,
g = Erdbeschleunigung,
τ = Zusatzglied,
α = Wärmeübergangszahl,
ϑ = Temperaturdifferenz $T - T_1$,
B = 8,87,
a' = Aenderung der Dichte und der Temperatur T.

τ wählen wir so klein, daß die Hauptströmung nicht merklich gestört wird. Es ist eine Kraft pro Flächeneinheit und soll hier die Auftriebskraft bedeuten. Aus dem Ansatz: Auftrieb gleich Volumen, multipliziert mit dem Unterschied der spezifischen Gewichte, folgt ohne weiteres:

$$\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} g\,\varrho\,a'\,f(T)\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierbei bedeutet $f(T)$ den Temperaturverlauf in Richtung von y. Dieser ist von Latzko für die ungestörte Bewegung bereits ermittelt. Er läßt sich in erster Näherung schreiben durch

$$\vartheta = -\vartheta_0 \left(\frac{y}{r}\right)^{1/7}\left\{1{,}112 - 0{,}0819\left(\frac{y}{r}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

In zweiter Näherung ändert sich prinzipiell nichts, die Rechnung wird nur weitläufiger. Man erhält dann für das Zusatzglied:

$$\tau = -\frac{1}{\pi} g\,\varrho\,a'\,(T_1 - T_2)\left(\frac{\delta^{8/7}}{r^{1/7}} - \frac{1}{15}\frac{\delta^{15/7}}{r^{8/7}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Durch den Zusatz ändert sich ja δ, aber unter geeigneten Bedingungen — wie z. B. kleiner Temperaturdifferenz — wollen wir annehmen, daß in erster Näherung die Geschwindigkeitsverteilung nach dem von v. Kármán[1]) aufgestellten Geschwindigkeitsgesetz mit der Potenz $1/7$ dargestellt werden kann. Damit nehmen wir gleichzeitig die dabei benutzten Grenzbedingungen in Kauf, daß $u = 0$ für $y = 0$ und $u = U$, $\partial u/\partial y = 0$ für $y = \delta$ sei. Wir rechnen nun genau so wie Latzko und benutzen dessen Gleichungen (23), (24), (25a), (26) und (27). Damit läßt sich dann (1) auf die Form bringen, wenn man $\delta/r = \xi$ setzt:

$$\frac{\left\{\frac{64}{345}\xi^3 - \frac{100}{69}\xi^2 - \frac{206}{207}\xi + \frac{616}{69}\right\}\xi^{1/4}}{(4\xi^2 - 22\xi + 165)^{5/4}}\,d\xi = \left(\frac{8}{7B}\right)^{7/4}\cdot\left(\frac{\nu}{165\,v}\right)^{1/4}\cdot\frac{1}{r^{5/4}}\cdot\left[1 + \frac{\tau}{\varrho}\cdot\left(\frac{7B}{8}\right)^{7/4}\cdot\left(\frac{r\xi}{\nu}\right)^{1/4}\cdot\left(\frac{(4\xi^2 - 22\xi + 165)}{165\,v}\right)^{7/4}\right]dz \quad (5).$$

[1]) v. Kármán, Diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 233.

Wenn wir noch durch den Klammerausdruck $(1 + \ldots .)$ dividieren, können wir schon das gesuchte Resultat ablesen. Die Gl. (5) sagt nur, daß zu einem bestimmten Wert von z ein Wert von ξ und damit von δ gehört, der sich aus dem regulären durch Division mit einer Zahl $(1 + m/n)$ gewinnen läßt. Damit wird aber das zugehörige δ vergrößert. Wir können nun die Klammer auf der linken Seite der Gleichung $\frac{1}{1+m/n}$ in eine Potenzreihe entwickeln und mit dem ersten Gliede abbrechen. Dann geht (5) über in:

$$\int \frac{\left\{\frac{64}{345}\xi^3 - \frac{100}{69}\xi^2 - \frac{206}{207}\xi + \frac{616}{69}\right\}\xi^{1/4}}{(4\xi^2 - 22\xi + 165)^{5/4}} \left[1 - \frac{\tau r^{1/4}\xi^{1/4}(165\nu)^{-7/4}}{\varrho \cdot a (4\xi^2 - 22\xi + 165)^{-7/4}}\right] d\xi = 2raz \quad (6),$$

wobei $a = \left(\frac{8}{7B}\right)^{7/4} \cdot \left(\frac{\nu}{165\nu}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{r^{5/4}}$ gesetzt ist.

Wir wählen nicht die Methode von Latzko, der die Lösung in eine Reihe nach Potenzen von z entwickelt, sondern integrieren gliedweise. Es ergibt sich, wenn man ausdividiert und integriert, für das erste der beiden Teilintegrale

$$T = 0{,}012077\,\xi^{5/4} + 0{,}0003703\,\xi^{9/4} - 0{,}0008392\,\xi^{13/4} \quad \ldots \quad (7).$$

Das zweite Integral wird, wenn man noch z aus (2) einsetzt, nach Entwicklung und Integration

$$\frac{g\,a'}{\pi}(T_1 - T_2) \cdot \frac{r^{5/4}}{r^{1/4}} \cdot \left(\frac{7B}{8 \cdot 165\nu}\right)^{7/4} \cdot (69{,}8\,\xi^{37/14} - 0{,}7666\,\xi^{51/14}).$$

Damit erhält man also insgesamt:

$$0{,}012077\,\xi^{5/4} + 0{,}00037\,\xi^{9/4} - 0{,}0008392\,\xi^{13/4}$$
$$- \frac{g\,a'}{\pi}(T_1 - T_2)\frac{r^{5/4}}{r^{1/4}} \cdot \left(\frac{7B}{8 \cdot 165\nu}\right)^{7/4}(43{,}39\,\xi^{37/14} - 7{,}724\,\xi^{51/14}) = \left(\frac{8}{7B}\right)^{7/4} \cdot \left(\frac{\nu}{165\nu}\right)^{1/4} \cdot \frac{z}{r^{5/4}} \quad (8).$$

Eine Diskussion dieser Gleichung zeigt uns zunächst, daß bei Nichtberücksichtigung der Ausdehnung und damit des Auftriebs $(a' = 0)$ die Latzkosche Lösung herauskommt, allerdings in einer Reihe für ξ. Ferner sehen wir, daß ξ um so größer wird, je größer die Ausdehnungsfähigkeit der Flüssigkeit und je größer die Temperaturdifferenz zwischen der Wand und dem Ende der Grenzschicht ist. Mit wachsendem Radius muß die Störung und damit die Grenzschichtdicke ebenfalls größer werden, dagegen nimmt sie für wachsendes ν und wachsende mittlere Strömungsgeschwindigkeit ab. Wenn nun die Rohrwand kälter ist als die Flüssigkeit, so kehrt sie im Ansatz das Vorzeichen von τ um und die ganze Rechnung erfolgt ebenso, so daß nur am Ende in (8) $+ g a'$ statt $- g a'$ steht. Den gleichen Erfolg hat übrigens auch eine Umkehrung des Vorzeichens von $T_1 - T_2$, da ja rein formal der Unterschied tatsächlich nur in einer Umkehrung des Vorzeichens der Temperaturdifferenz beruht.

Die ganze Rechnung kann nur für Gase ausgeführt werden, da bei tropfbaren Flüssigkeiten die Kohäsion berücksichtigt werden müßte. In den beiden folgenden Zahlentafeln sind daher für Luft für bestimmte ξ die Werte von z für ein Rohr von 17 mm Durchmesser und eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit von 0,5 m/sec berechnet. Die Temperaturdifferenzen sind dabei von 5 bis 60° C variiert, wobei aber bemerkt werden muß, daß die hier verwandte Näherung für die hohen Werte kaum ausreicht. In den Zahlentafeln ist der Fall der wärmeren Wand durch —, der der kälteren durch + und der ohne Berücksichtigung des Auftriebs durch 0 bezeichnet.

Zahlentafel 1.

$\Delta T = 10°$, z

ξ	—	0	+
1	0,2948	0,3775	0,4602
0,4	0,0869	0,1041	0,1213
0,3	0,0876	0,0917	0,0958
0,2	0,0487	0,0551	0,0615
0,1	0,0229	0,0232	0,0235
0,01	0,0013	0,0013	0,0013

Zahlentafel 2.

	+					z	−			
ΔT	$\xi = 0{,}01$	0,1	0,2	0,4	1	0,01	0,1	0,2	0,4	1
5	0,0013033	0,02443	0,05542	0,1354	0,4186	0,0013027	0,02201	0,05514	0,1268	0,336
20	0,0013041	0,02784	0,05584	0,1485	0,5428	0,0013019	0,01860	0,05472	0,1137	0,2118
30	0,0013046	0,03035	0,05611	0,1572	0,6256	0,0013014	0,01609	0,05444	0,1050	0,129
40	0,0013053	0,03274	0,05640	0,1653	0,6883	0,0013008	0,01370	0,05416	0,0961	0,0663
60	0,0013062	0,03748	0,05695	0,1830	0,8743	0,0012998	0,00896	0,05361	0,0792	—

Um einen Ueberblick über die Verhältnisse zu gewinnen, wie sie durch unser Zusatzglied geschaffen sind, bestimmen wir durch Zeichnung den mittleren Potenzexponenten. Wir erhalten dann eine Kurve von der Form $z = T^m \cdot \xi^n$. Aus Zahlentafel 1 ergibt sich im Mittel $n = 1{,}3$. Aus Zahlentafel 2 ergibt sich für $\xi = 0{,}2$ $m = 0{,}03$, für $\xi = 0{,}4$ $m = 0{,}1$. Natürlich ändert sich auch n mit verschiedenen Störungsstärken in gleichem Sinne. Die hier angegebenen Werte gelten für die geringsten hier angegebenen Temperaturdifferenzen. Wenn wir nun den Fall der heißen Wand mit dem der kalten vergleichen, so wird die gegenseitige Neigung etwa doppelt so groß werden, d. h. wir erhalten für $\xi = 0{,}4$, $m = 0{,}2$. Zur angenäherten Berechnung der abgegebenen Wärmemenge bestimmen wir nun durch Zeichnung aus der Formel (37a) von Latzko die mittlere Potenz der Aenderung von α mit ξ. Die Formel lautet:

$$\alpha_n = 1{,}340 \cdot v \cdot C \cdot \left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{1/4} \cdot \frac{1{,}143 - 0{,}032\,\xi + 0{,}00148\,\xi^{1{,}865}}{(4\,\xi^2 - 22\,\xi - 165)^{3/4} \cdot \xi^{1/4} \cdot \{1 - 0{,}133\,\xi + 0{,}024\,\xi^2 + (0{,}00148\,\xi^{1{,}865} - 0{,}032\,\xi)\} \cdot (0{,}52\,\xi - 0{,}143\,\xi^2)}.$$

Es ergibt sich für den betrachteten Bereich $\xi = 0{,}1 - 0{,}4$ die Potenz $-0{,}2$, für den Gesamtbereich die Potenz $-0{,}19$. In dem Wärmeübergangskoeffizienten wird sich das Zusatzglied in der Weise geltend machen, daß die vorher von der Temperaturdifferenz unabhängige Wärmeübergangszahl jetzt, wenn auch nur sehr wenig, von der Temperaturdifferenz abhängig wird. Es ergibt sich an der Stelle $\xi = 0{,}2$, $\alpha\, v\, T^{-0{,}006}$, für $\xi = 0{,}4$, $\alpha\, v\, T^{0{,}02}$. Wenn wir die gleichen Abhängigkeiten für tropfbare Flüssigkeiten annehmen, dann gelten die gleichen Potenzabhängigkeiten für Temperaturen, die um 1,7 mal größer sind. Diese Annahme ist sicher nicht richtig und soll nur zur rohen Orientierung dienen.

Ueber diese Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von $T_1 - T_2$ lagert sich nun des weiteren die schon von Nußelt[1]) herangezogene Abhängigkeit der Flüssigkeitskonstanten von der Temperatur. Hierbei sind Mitteltemperaturen einzuführen, wie dies z. B. von Schack oder von Nußelt geschehen ist. Auf diese hat man die Flüssigkeitskonstanten zu beziehen und nur bei ihrer Aenderung wird sich eine Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Temperatur aus diesem Grunde bemerkbar machen. Für die hydrodynamisch ausgebildete Strömung ist nach Schack die Mitteltemperatur zusammengesetzt aus der Wandtemperatur T_w und der Flüssigkeitstemperatur T_A in dem Verhältnis $T_m = {}^8/_9\, T_A + {}^1/_9\, T_R$. Wir sehen also, daß sich eine Aenderung der Wandtemperatur nur mit etwa 10 vH ihres Betrages in der Mitteltemperatur bemerkbar macht. In diesem Falle wird die Aenderung der Flüssigkeitskonstanten mit der Temperatur nur wenig in Frage kommen, anders dagegen, wenn die Flüssigkeitstemperatur selbst geändert wird. Hierfür können wir wieder mit mittleren Bruchpotenzen rechnen und annehmen, daß sich z. B. ν ändert nach der Formel $\nu = \nu_0 \cdot T^x$ usw. Dann ändert sich für Luft der konstante Faktor in (9) wie $T^{-0{,}071}$, für Wasser dagegen wie $T^{-0{,}168}$.

Man kann wohl kaum für unendlich kleine Temperaturdifferenz Wasser — Rohr die Abweichung erklären. An dieser Stelle liegt ein Unstetigkeitspunkt, denn für die Temperaturdifferenz Null ist natürlich auch $\alpha = 0$. Die Extrapolation veranschaulicht aber sehr deutlich die bestehenden Unterschiede. Rein qualitativ können wir erkennen, daß die Unterschiede in α um so größer werden, je kleiner die Geschindigkeit und je größer die Temperaturdifferenz ist. Die erste Folgerung sehen wir bei den Versuchen von Stender bestätigt beim Vergleich der Versuchsreihen bei der Wassertemperatur von 70°, dagegen widerspricht der Versuch bei der Wassertemperatur von 40°. Die Abhängigkeit von der Temperatur ist nur gering, sie ist aber doch an allen Versuchen erkennbar. Mit dieser

[1]) W. Nußelt, Festschrift der Technischen Hochschule Karlsruhe, 1925.

Methode ist dagegen die Zunahme der Unterschiede mit der Flüssigkeitstemperatur unerklärlich. Diese wird man wohl mit Nußelt als Funktion der Temperaturabhängigkeit der Flüssigkeitskonstanten ansehen müssen, wobei aber das Zusatzglied nicht vernachlässigt werden darf. Es kommt dabei in unserer Formel α' und $\nu^{1/4}$ vor. Es zeigt sich, daß $\alpha' \sim T^{-0,785}$ und $\nu^{1/4} \sim T^{-0,213}$, so daß aus $\alpha'/\nu^{1/4}$ eine Zunahme des Störungsgliedes mit T resultiert. Außerdem ergibt sich von der rechten Seite von (8) eine Temperaturabhängigkeit von ξ im ganzen. Schließlich verändert sich $C \cdot \nu^{1/4}$, also der Faktor der Flüssigkeitskonstanten in α, direkt mit T. Beide Aenderungen liegen in gleichem Sinne. Wir können sie aber nicht näher auswerten, da die schon lange angekündigte Uebertragung der Latzkoschen Rechnung auf tropfbare Flüssigkeiten noch nicht erschienen ist. Qualitativ können wir also die Versuche von Stender erklären bis auf den Versuch mit $v = 1{,}545$ m/sek und 40° Wassertemperatur. Dieser fällt ganz aus dem Rahmen der drei anderen heraus.

In gleicher Weise lassen sich auch die Versuche von Stanton und Soennecken deuten (vergl. die entspr. Kurven von Nußelt). Hierbei hat man nur zu bemerken, daß der Temperaturunterschied bei verschieden hoher Absoluttemperatur immer konstant ist. Dies war bei den oben erwähnten Messungen von Stender nicht der Fall. Bei Soennecken kommt außerdem noch dazu, daß seine Versuche durch eine noch ungeklärte Ursache, die hier geeignet berücksichtigt werden müßte, größere Abweichungen von der Theorie zeigen. Diese liegen darin, daß der Wärmeübergang im rauhen Rohr gegen die theoretischen Anschauungen und die Experimente anderer Forscher einen kleineren Wert ergibt als im glatten.

Wir haben hier wie es scheint vier Faktoren, die zur Erklärung des Phänomens beitragen und die, falls eine zahlenmäßig genaue Theorie für tropfbare Flüssigkeiten vorläge, gegeneinander abgeschätzt werden könnten. Es sind dies 1. die Temperaturdifferenz Wand — Flüssigkeit, die als solche das Zusatzglied bedingt, 2. die Temperaturabhängigkeit der Konstanten des Zusatzgliedes und der von ξ im ganzen, 3. die Temperaturabhängigkeit der Konstanten in α, 4. der Strömungszustand, d. h. der Uebergang von hydrodynamisch unausgebildeter zu ausgebildeter Strömung.

Für die Technik kommen die Unterschiede scheinbar weniger in Frage, da nur die drei erwähnten Autoren darauf eingehen. Die immerhin nur kleinen Differenzen lassen sich nur schwer eindeutig messen, so daß die vorliegenden Versuche kaum schon endgültige Zahlenwerte darstellen dürften.

2. Wärmeabgabe einer Platte im turbulenten Strom. Genau so wie in **1** kann man die Rechnungen für die Ebene durchführen. Die Einzelrechnungen werden hier sogar noch einfacher. Wir setzen wieder voraus, daß die Störung so klein ist, daß der Exponent der Geschwindigkeitsverteilung sich nicht ändert. Dies ist nicht so leicht zu befürchten, da er über ein weites Gebiet der Parameter gilt. Unser Ausgangspunkt ist wieder die Impulsgleichung. Sie lautet hier

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho\, u^2\, dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho\, u\, dy = -0{,}0225\,\varrho\, U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} + \int_0^\delta g\,\varrho\,\alpha'\, T(y)\, dy \quad . \quad (10),$$

wobei das letzte Glied den Auftrieb angibt. Ist die Platte kälter als die Flüssigkeit, so tritt nur das entgegengesetzte Vorzeichen vor dem letzten Gliede auf. Die Variablen lassen sich trennen und man erhält leicht die Form

$$\frac{\delta^{1/4}\, d\delta}{1 + a\,\delta^{5/4}} = b\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wenn man setzt $\frac{7}{8} \cdot \frac{g\,\alpha'\,\vartheta_0}{0{,}0225\, U^2} \cdot \left(\frac{U}{\nu}\right)^{1/4} = a\,, \qquad \frac{72}{7} \cdot 0{,}0225 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4} = b\,.$

Diese Gleichung können wir auf zwei verschiedene Arten integrieren. Entwickelt man $(1 + a\,\delta^{5/4})^{-1}$ binomisch und bricht mit dem quadratischen Gliede ab, so erhält man nach Integration einen Ausdruck, an dem man leicht die Veränderungen gegenüber dem unkorrigierten δ feststellen kann. Man findet nämlich die Gleichung

$$\delta^{5/4} - \frac{a}{2}\,\delta^{10/4} + \frac{a^2}{3}\,\delta^{15/4} = \frac{5}{4}\, b\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Man kann natürlich δ auch in einer Reihe in x schreiben. Dann ist

$$\delta = \left(\frac{5\,b}{4}\right)^{4/5} x^{4/5} + \frac{2}{5}\, a \left(\frac{5\,b}{4}\right)^{9/5} x^{9/5} + \frac{23}{150}\, a^2 \left(\frac{5\,b}{4}\right)^{14/5} \cdot x^{14/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\mathbf{a}).$$

Bei umgekehrten Vorzeichen, d. h. bei kalter Wand und heißer Flüssigkeit lautet Gl. (12) dann:

$$\delta^{5/4} + \frac{a}{2}\,\delta^{10/4} + \frac{a^2}{3}\,\delta^{15/4} = \frac{5}{4}\,b\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Wir können auch hier wieder den gleichen Schluß wie oben ziehen, daß die heiße Wand eine Verdickung der Grenzschicht hervorruft und dadurch den Wärmeübergang verkleinert, während eine kalte Wand gerade umgekehrt wirkt. Kinetisch ließe sich das vielleicht dadurch erklären, daß durch den größeren mitgeteilten Impuls beim ersten Falle die Geschwindigkeit erhöht wird und diese die reguläre Stromgeschwindigkeit unterdrückt. Für die Verhältnisse in Luft nehmen die Reihen folgende Koeffizienten an, wenn $U = 5$ m/sek und $T_1 - T_2 = 10^0$ ist.

$$\delta^{5/4} \pm 1{,}1632\,\delta^{10/4} + 1{,}8039\,\delta^{15/4} = 0{,}08759\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12b).$$

Mit diesen Werten ergibt sich folgende Abhängigkeit[1]):

Zahlentafel 3.
x, $\Delta T = 10^0$

δ	+	−
0,1	0,688	0,604
0,2	1,814	1,339
0,4	11,606	8,918

Zahlentafel 4.
$x = f(T)$, $\delta = 0{,}1$

ϑ_0	+	−
10	0,688	0,604
20	0,741	0,573
30	0,791	0,549
40	0,869	0,533
60	0,026	0,522

Aus letzterem folgt dann aus dem Fall $\begin{matrix} T_w > T_{fl} & \delta \sim x^{+0{,}72} \\ T_w < T_{fl} & \delta \sim x^{+0{,}88} \end{matrix}$ an Stelle der nach Kármán gegebenen Funktion $\delta \sim x^{0{,}8}$. Aus der zweiten Zahlentafel folgt für $\delta = 0{,}1$ eine Abhängigkeit für den ersten Fall $x_{\delta=0{,}1} = \Delta T^{0{,}1}$ und für den zweiten Fall $x_{(\delta=0{,}1)} = \Delta T^{-0{,}1}$. Versuche in dieser Richtung sind nicht zum Vergleich geeignet.

Ein anderer Weg zur Integration von (11) ist die direkte Integration der linken Seite. Es ergibt sich hier für den Fall 1 das obere, für den Fall 2 das untere Zeichen.

$$\frac{4}{5a}\left[\log\left(1 + \delta^{1/4}\sqrt[5]{a}\right) - \sum_1^5{}^{\varkappa} \log\left(1 - 2\,\delta^{1/4}\sqrt[5]{a}\cos\pi\,\frac{2\varkappa-1}{5} + (\delta^{1/4}\sqrt[5]{a})^2\right]\right] = b\,x.$$

3. Berücksichtigung der Grenzschichtänderung. Wir wollen die obige Spezialformel nicht näher untersuchen, sondern bei folgendem etwas allgemeinerem Falle stehen bleiben. Wenn wir die Störung im obigen Ansatz auch klein machen, so muß doch, wenn man nicht in der ersten Annäherung stehen bleibt, durch die Aenderung von δ auch die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand geändert werden. In diesem Falle läßt sich (11) umformen durch die Substitution $z = \delta^{1/4}\sqrt[5]{a}$ zu der Form $\int \frac{z^4\,dz}{1 + a\,z^5}$. Unter obiger Annahme sind nun hier die Exponenten wieder variabel $4 + \varepsilon$, $5 + \varepsilon$. Das Integral kann man wie oben auswerten nach dem allgemeinen Schema

$$\int \frac{z^{m-1}}{1 + a\,z^{2n+1}} = [-1]^{m+1}\frac{\log(1+z)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\sum_1^{2n+1}{}^{\varkappa} \cos\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1}\log\left(1 - 2\,z\cos\frac{2\varkappa-1}{2n+1}\pi + z^2\right)$$

$$+ \frac{2}{2n+1}\sum_1^{2n+1}{}^{\varkappa} \sin\frac{m\pi\ 2\varkappa-1)}{2n+1}\cdot \operatorname{arctg}\frac{z\cos\dfrac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}{\sin\dfrac{(2\varkappa-1)\pi}{2n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Wenn wie oben die konstanten Exponenten 4,5 vorkommen, so fällt der letzte Summand wegen $\sin\frac{m(2\varkappa-1)}{2n+1} = 0$ fort. Im allgemeinen bleibt aber das letzte Glied stehen. Wir geben damit zum Ausdruck, daß nicht mehr das Gesetz des Druckabfalls erhalten bleibt, sondern daß sich der Nenner des Exponenten ändert. Unter dieser Voraussetzung kann man die Gleichung unter Benutzung von (15) ausführlich schreiben.

[1]) Das −Zeichen bedeutet die heiße Wand.

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{1+a\,z^{2n+1}} = (-1)^{5+\varepsilon}\cdot\log\frac{1+z}{5+2\varepsilon} + \frac{1}{5+2\varepsilon}\Big[\cos\frac{(5+\varepsilon)\,\pi}{5+2\varepsilon}\cdot\log\Big(1-2\,z\cos\frac{\pi}{5+2\varepsilon}+z^2\Big)$$

$$+\cos\frac{(5+\varepsilon)\,3\,\pi}{5+2\varepsilon}\cdot\log\Big(1-2\,z\cos\frac{3\,\pi}{5+2\varepsilon}+z^2\Big)+\ldots\Big]+\frac{2}{5+2\varepsilon}\Big[\sin\frac{(5+\varepsilon)\,\pi}{5+2\varepsilon}$$

$$\cdot\operatorname{arctg}\frac{z-\cos\dfrac{\pi}{5+2\varepsilon}}{\sin\dfrac{\pi}{3+2\varepsilon}}+\sin\frac{(5+\varepsilon)\,\pi}{5+2\varepsilon}\cdot\operatorname{arctg}\frac{z-\cos\dfrac{3\,\pi}{5+2\varepsilon}}{\sin\dfrac{3\,\pi}{5+2\varepsilon}}+\ldots\ldots \quad (16).$$

Da

$$\operatorname{arctg} x=\frac{1}{2\,i}\log\frac{1+i\,x}{1-i\,x}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

ist, läßt sich die linke Seite der Gleichung formal schreiben

$$\Pi\,R(z)\cdot\Pi\left(\frac{1+i\,z_\varkappa}{1-i\,z_\varkappa}\right)^{\frac{1}{2i}}=e^{R_2(x)}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Hierbei bedeuten $\Pi\,R(z)$ ein Produkt reeller analytischer Funktionen von z, der zweite Faktor die $2\,i$-te Wurzel aus einem Produkt linear gebrochener komplexer Funktionen. Rechts ist $R_2(x)$ eine rationale Funktion von x. Diese transcendente Gleichung ist in z höchstens vom zehnten Grade. Für z ergibt sich dabei eine rationale Funktion von $R_2(x)$ mit komplexen Koeffizienten. In diesen kommen a und b, d. h. die Versuchsparameter vor. Aus dieser Koeffizientendarstellung ergibt sich also für die Stelle x der Platte eine Mehrdeutigkeit der Größen z bzw. δ. Andererseits ist δ, da man die komplexe Funktion auch als trigonometrische schreiben kann, eine periodische Funktion der Flüssigkeitsparameter und der Stelle x. Hieraus können wir also auf Wirbelbildung resp. Ablösung an einer ideal glatten Wand schließen. Man hätte diesen Schluß vielleicht auch aus (16), wenn auch nicht mit derselben Sicherheit, direkt ziehen können. Wenn man z stetig ändert, so ändert sich auch $\log f(z)$ und $\operatorname{arctg} f_1(z+a_\varkappa)$ stetig, dann muß aber $(z+a_\varkappa)$ die Werte $\pm\infty$ annehmen, sobald $\operatorname{arctg}(z+a_\varkappa)$ die Werte $\pm\pi/2$ erreicht.

Hier erhebt sich nun die Frage, dnrch welche Zusammensetzung einfacherer Kurven sich die Kurve der Gl. (11) darstellen läßt. Die nächstliegende Vermutung ist die schon oft angenommene Voraussetzung von elliptischen Wirbeln, die an der Wand abrollen. Hier rollen diese Wirbel an der Grenzschicht ab. Die Durchführung dieses Gedankens, d. h. die Aufstellung der Differentialgleichung auf Grund dieser Voraussetzung, ist aber zu schwierig und wir wollen versuchen, einen besonders einfachen Fall zu behandeln, nämlich das Abrollen von Kreiswirbeln an der Grenzschicht. Dieses Abrollen an der Wand selbst ist kürzlich von Lorenz[1]) auf Grund ganz anderer Voraussetzungen erhalten worden. Ganz allgemein haben wir dann also folgendes System von Gleichungen aufzulösen.

$$y=F(x)\qquad y=b\cdot x^{4/5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

$$r=f(q)\qquad r=\text{konst.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

$$\left[(\xi-x)+(\eta-y)\frac{dy}{dx}\right]\sqrt{1+\left(r\frac{dq}{dr}\right)^2}+r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0\ldots \quad (21),$$

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22),$$

$$(\xi-x)+(\eta-y)\frac{d\eta}{d\xi}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Hierbei ist die erste die Gleichung der Rollfläche, (20) die des rollenden Gebildes, (23) die Gleichung der gesuchten Kurve.

Wenn man $\eta'^2=x$ setzt, kann man diese Gleichungen auch zusammenfassen zu:

$$x^5+x^4-2\,a\,\eta\,x^3-2\,a\,\eta\,x^2+a^2\,\eta^2\,x=a^2\,(r^2-\eta^2),\qquad a=\frac{25^2}{16^2\cdot b^5} \quad (24).$$

Hierbei ist η' mit r und η verknüpft. Wenn man statt r die andere Koordinate ξ einführt, so erhält man:

$$\eta'^5\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot b^5-\eta'\cdot\eta=\xi\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

[1]) Phys. Zeitschr. 1927, S. 1.

Beide Gleichungen lassen sich nicht allgemein auflösen. In dritter Näherung ergibt sich für kleine η' aus (24) die Lösung:

$$\eta' = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\eta} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{a}} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \sin \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{2a\eta}}{\sqrt{1 + \frac{3}{2a\eta}}} \right).$$

Wenn man den sin in eine Potenzreihe nach η entwickelt, erhält man:

$$\eta' = \left(\frac{1}{\sqrt{\eta} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \left[\frac{1}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3 \sqrt{3}}{12} + \ldots \right],$$

$$y = \frac{1}{3z} + \frac{z}{3 \cdot 3!} + \frac{7 z^3}{9 \cdot 5!} + \ldots, \qquad z = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2a\eta}{3}} + \frac{5}{6} \left(\frac{2a\eta}{3} \right)^{3/2} - \frac{25}{3 \cdot 28} \left(\frac{2a\eta}{3} \right)^{5/2}.$$

Man kann nun auch diese Potenzreihe in eine andere umschreiben, die auf dem Anfangsglied $\eta^{1,25}$ aufgebaut ist und gewisse andere Koeffizienten hat. Damit würde sich dann eine Annäherung an die obige Formel ergeben. Die Schwierigkeit ist durch die anfangs eingeführte Bruchpotenz bedingt.

Genau so läßt sich der Fall behandeln, wenn die Flüssigkeit der wärmeabgebende Körper ist. Es ändern sich nur die Vorzeichen. Damit ist dann im allgemeinen eine Veränderung von δ gegeben, wie wir sie schon im Abschn. **2** konstatierten. Damit scheint zunächst erwiesen, daß eine turbulente Flüssigkeit durch ein zur allgemeinen Bewegungsrichtung geneigtes Temperaturfeld noch turbulenter wird; andererseits ist aber auch die Wirbelbildung an einer ideal glatten Wand als möglich hingestellt.

4. Der laminare Strom mit Temperaturgefälle. Nach den Bemerkungen des vorigen Abschnitts liegt es nahe, an eine wenigstens qualitative Beschreibung der Turbulenzentstehung zu gehen. Nach der Schlußbemerkung des vorigen Abschnitts findet eine Verstärkung der Turbulenz statt, wenn die Flüssigkeit wärmer ist als das Rohr. Genau so, wie dies für die turbulente Flüssigkeitsbewegung abgeleitet wurde, kann man es auch für einen anderen Exponenten der Geschwindigkeitsverteilung, z. B. also für den der laminaren, ableiten. Nun wird auch bei vollkommen gleicher Temperatur der Flüssigkeit und der Wand die Flüssigkeit durch die innere Reibung etwas wärmer (vergl. Latzkos Abschätzung). Diese Temperaturdifferenzen können sich nur bis zu einer bestimmten Höhe nebeneinander stabil erhalten und werden bei größeren Differenzen einen Ausgleich durch Konvektionsströme suchen, nachdem die Leistungsfähigkeit der reinen Wärmeleitung aufgezehrt ist. Die Konvektionsströme transportieren also Impuls vom Rohr an die Wand. Ihre ungeordnete Verteilung ist wohl nur statistisch erfaßbar. Diese Erklärung stimmt also mit der schon von A. H. Lorenz gefundenen Tatsache überein, daß in der Flüssigkeit selbst die Impulsmenge entsteht, die eine Durcheinanderwirbelung der Stromfäden hervorruft. Andererseits stimmt sie mit der von King gegebenen darin überein, daß Dichteänderungen ihre Ursache seien. Der Unterschied beider Auffassungen besteht aber darin, daß King in einer sehr kurzen Bemerkung die Kompressionen und Dilatationen durch Schallwellen zur Erklärung herangezogen zu sehen wünscht, während hier die Ursache in der verschieden starken Wärmeentwicklung gesucht wird. Wenn also die reine Wärmeleitung nicht schnell genug einen Ausgleich der Temperaturen herbeiführen kann, wird zunächst ein sehr schwacher Konvektionsstrom zwischen den einzelnen Flüssigkeitsschichten einsetzen. Er verändert die Geschwindigkeitsverteilung nur an den Stellen, an denen er augenblicklich auftritt, so daß wir die z. B. von King beobachtete statistische Verteilung der Abweichungen von der parabolischen Verteilung erhalten. Dadurch tritt aber eine Vermehrung der Reibung und dadurch eine verstärkte Wärmeerzeugung auf, die nun wieder ihrerseits zum verstärkten Ausgleich drängt. Schließlich wird die Stärke der Impulsübertragung so groß, daß die Geschwindigkeitsverteilung geändert werden kann. Damit ändert sich natürlich auch die Dicke der Grenzschicht. Wir gewinnen also ein Kriterium für den Grenzwert der laminaren Schicht, wenn wir bedenken, daß in ihr durch Wärmeleitung die von innen kommende Impulsmenge an die Wand übertragen wird. Somit ist also die Geschwindigkeitsverteilung nicht beliebig ver-

änderlich, sondern es wird sich eine, wenn auch dünne laminare Schicht immer halten können [1]).

Es kann hier nicht eine genaue Berücksichtigung aller vorkommenden Effekte möglich sein. Wir wollen uns nur vergewissern, ob größenordnungsmäßig die herangezogene Erscheinung ausreicht, um die laminare Strömung in die turbulente zu verwandeln. Wir gehen dazu, wie in den obigen Betrachtungen, von der Kármánschen Integralbedingung aus, die wir der Einfachheit wegen auf eine ideal glatte, unendlich ausgedehnte, horizontale Ebene anwenden. Wenn wir nun der Einfachheit wegen annehmen, daß innerhalb der Grenzschicht eine konstante mittlere Reibungstemperatur erzeugt wird, so finden wir mit dem Ansatz (4) für die Geschwindigkeitsverteilung von Pohlhausen die Gleichung:

$$\delta\, d\,\delta \Big/ \left(1 + \frac{g\, a'\, \varrho\, \Delta T}{2\, \nu\, U}\,\delta\right) = \frac{2\,\nu}{U} \cdot \frac{315}{37}\, d\,x\,.$$

Wir können nun die von Latzko ermittelten Temperaturen, wenn sie auch ursprünglich für Turbulenz gelten, mit den dazugehörigen Geschwindigkeiten in erster Näherung einsetzen und den Wert von δ finden, der zuerst in beträchtlicher Weise gegenüber dem ohne Temperaturgefälle geändert wird. Wir finden dabei für die Verkleinerung der Grenzschicht an der Stelle $x = 1$ die Faktoren:

U	0,5	1	2,5	100	200	400 m/sec
	1,2	1,1	1,1	1,1	1,2	1,3

Wir sehen also ein Wachsen der Beeinflussung hier bei der rohen Rechnung bei einer Geschwindigkeit von 400 m/sec, also in Luft, für die die Rechnung durchgeführt wurde, bei Ueberschallgeschwindigkeit. Damit ist nicht gesagt, daß die Störung auch Ueberschallgeschwindigkeit hat. Bei Rohren z. B. zeigt sich der Umschlagspunkt schon bei kleineren Geschwindigkeiten. Hierbei ergibt sich die Reynoldssche Zahl zu 2700. Sie stellt also eine bessere Annäherung an die wirklich gemessenen Zahlen dar, als die bisher theoretisch bestimmten, die um 300 liegen. Hierzu ist noch zu bemerken, daß zunächst die Temperaturverteilung innerhalb der Grenzschicht nicht konstant ist, und ferner, daß die Wärmeleitung im laminaren Strom wohl nicht vernachlässigt werden darf. Sie wird die hauptsächlich in der Nähe der Wand erzeugte hohe Temperatur auszugleichen suchen, und somit eine größere Konstanz der Verteilung in der Grenzschicht erstreben, die wir ja oben vorausgesetzt hatten. Beide Erscheinungen arbeiten gegeneinander. Trotzdem wird die Wärmeleitung eine weitere Erhöhung der Reynoldsschen Zahl bewirken, indem sie die störenden Temperaturdifferenzen weiter vermindert. Ferner ist aber noch zu beachten, daß der von Anfang an bestehende Einfluß auch bei geringen Temperaturen eine Beeinflussung des Strömungsprofils darstellt, in dem Sinne einer erhöhten Wärmeerzeugung bzw. Turbulenz, die in unserer Abschätzung nicht zum Ausdruck gekommen ist. Wir verstehen hieraus, daß die Turbulenz so plötzlich ansteigt, da eine einmalige Störung zur Bildung von Störungsenergie in günstiger Verteilung Anlaß gibt, so daß das System nach einem hohen Grenzwert strebt. Besonders stark wirkt eine Störung, wenn sie bei geeigneter Geschwindigkeit Resonanzschwingungen der Flüssigkeit anregt.

Eine exakte Berücksichtigung dieser einzelnen Ursachen führt auf eine recht komplizierte Integrodifferentialgleichung, deren Lösung an anderer Stelle mitgeteilt werden wird. Es bleibt noch zu erwähnen, daß die vorgeschlagene Erklärung auch mit der Kármánschen gaskinetischen Deutung der Reynoldsschen Zahl verträglich ist.

Zusammenfassung. Es werden Beobachtungen von Soennecken und Stender über die Abkühlung eines Rohres an einen Flüssigkeitsstrom und umgekehrt auf die freie Kühlung zurückgeführt und größenordnungsmäßig gezeigt, wie sich die Unterschiede auf Grund der Prandtlschen Theorie berechnen lassen. Die Art der Flüssigkeitsbewegung wird diskutiert und besonders für eine glatte ebene Wand gezeigt, daß periodische Störungen auftreten. Schließlich wird in großen Zügen ein Kriterium für die Größe der kritischen Reynoldsschen Zahl und die Entstehung der Turbulenz durch Eigenerwärmung angegeben.

[1]) Hierdurch kann ein Knick im Geschwindigkeitsprofil eintreten, der ein Kriterium für die Turbulenz ist.

Kinetik pseudoharmonischer Reibungsschwingungen.[1]

Von **RUDOLF TIEMANN** in Erfurt.

1. Einleitung und Zusammenfassung. Die sogenannten pseudoharmonischen Schwingungen, d. h. Schwingungen, bei denen die Restitutionskraft nicht nur von der ersten Potenz der Ablenkung x aus der Ruhelage, sondern im allgemeinen auch von höheren Potenzen von x abhängt, bei denen die Differentialgleichung der Bewegung nicht mehr linear ist, bieten der exakten mathematischen Behandlung erhebliche Schwierigkeiten. Nur unter Einführung bestimmter Voraussetzungen über die Größenverhältnisse der in der Gleichung auftretenden Parameter und über den Gültigkeitsbereich der Lösungen kann man das Problem näherungsweise behandeln. Für den Fall eines unsymmetrischen Kraftfeldes, d. h. die die Restitutionskraft darstellende Funktion enthält Potenzen von x mit geradzahligem Exponenten, sind die freien, ungedämpften, pseudoharmonischen Schwingungen von Fr. Richarz[2]), P. Schulze[3]), F. A. Schulze[4]), R. v. Förster[5]) und E. Eichhorn[6]) aus Anlaß der theoretischen Untersuchung physikalischer Meßinstrumente, wie z. B. der magnetischen Wage, der Drehwage, des Horizontalintensitätsvariometers usw. behandelt worden. Der von ihnen behandelte Gleichungstyp hat die Gestalt:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x - \beta x^2 = 0.$$

Sehr eingehend hat J. Horn[7]) die pseudoharmonischen Schwingungen untersucht. Er nimmt das Kraftgesetz in Form einer gewöhnlichen Potenzreihe an und integriert die Gleichungen mit Hilfe eines besonderen Reihenansatzes. Später hat dann G. Duffing den pseudoharmonischen Schwingungen in seiner Monographie: »Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung«[8]) eine ausführliche Darstellung gewidmet.

In der vorliegenden Arbeit werden pseudoharmonische Reibungsschwingungen[9]) untersucht, d. h. pseudoharmonische Schwingungen, die durch eine konstante Reibung mit endlichem Haftbereich gehemmt werden. Unsere Aufgabe ist, die Kinetik dieser Bewegungsvorgänge möglichst vollständig zu entwickeln, soweit es die mathematischen Methoden erlauben. Insbesondere werden die maximalen Ausschläge als charakteristisches Element diskutiert. Wir legen Wert auf eine analytische Behandlung[10]) des Problems, da sie den für die experimentelle Untersuchung wichtigen Zusammenhang zwischen den beobachteten und gemessenen Größen und den zu ermittelnden Parametern (Konstituenten des Kraftfeldes) herbeiführt. In Ermangelung einer strengen Lösung wird die Untersuchung auf die Nähe des Haftbereiches beschränkt. Das soll bedeuten: Wir nehmen einen möglichen Endzustand an, »schneiden« den Anfang der Bewegung »ab« und beginnen die Verfolgung des Bewegungsvorganges in der Nähe des Haftbereiches von einem Umkehrpunkt ab, oder wir lassen die Bewegung von vornherein in der Nähe des Haftbereiches mit einem beliebigen Anfangszustand beginnen. Für erzwungene Reibungsschwingungen ist die erste Deutung für den Fall, daß die Amplituden zunehmen bzw. konstant bleiben, überhaupt nicht, und die zweite für den Fall, daß die Amplituden zunehmen, nur unter der Voraussetzung einer beschränkten Zeit zulässig.

Die Einführung einer konstanten Gleitreibung, d. h. eines Widerstandes, der seiner Größe nach von der Geschwindigkeit unabhängig, der Bewegungsrichtung aber stets entgegengerichtet ist, bringt in die Schwingungsgleichung eine Unstetigkeit hinein. Den

---

[1]) Jenaer Dissertation, Referent Prof. Dr. Winkelmann.

[2]) Fr. Richarz, Ann. der Physik Bd. 8 (1902), S. 348 bis 366.

[3]) P. Schulze, Diss. Greifswald 1901.

[4]) F. A. Schulze, Ann. der Physik Bd. 9 (1902), S. 1111 bis 1123.

[5]) R. v. Förster, Diss. Marburg 1905.

[6]) E. Eichhorn, Diss. Marburg 1909.

[7]) J. Horn, Ztschr. f. Math. und Physik Bd. 47 (1902), S. 400 bis 428; 48 (1902), S. 400 bis 434; 49 (1903), S. 246 bis 269; 52 (1905), S. 1 bis 43; 53 (1906), S. 370 bis 402. Archiv f. Math. u. Physik Bd. 28 (1919/20), S. 131 bis 137.

[8]) Fr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1918.

[9]) Die linearen Reibungsschwingungen des Regulators (eines Systems mit zwei Freiheitsgraden) hat v. Mises behandelt. Elektrotechnik und Maschinenbau 1908, H. 37.

[10]) Tabellarisch und graphisch ist die harmonische, erzwungene Reibungsschwingung von W. Eckolt (Ztschr. f. techn. Physik, 7. Jahrg. Nr. 5, [1926]) behandelt worden.

Schwingungsvorgang als Ganzes zu behandeln, ist demnach nicht möglich; wir müssen vielmehr die Schwingung von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt gesondert untersuchen und die so erhaltenen Schwingungsphasen aneinanderfügen. Aus dem Vorhergehenden ist klar, daß die Reibung zwei Vorzeichen haben muß, von denen stets das der Bewegungsrichtung entgegengerichtete zu wählen ist. Unter einem Hingang wollen wir eine Schwingung in Richtung der positiven x Achse ($\dot{x} > 0$), unter einem Rückgang eine Schwingung in Richtung der negativen x-Achse ($\dot{x} < 0$) verstehen. Während eines Hinganges ist also die Reibuug negativ, während eines Rückganges positiv.

Nachdem für die maximalen Ausschläge der freien, ungedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingungen mit unsymmetrischem und symmetrischem Kraftfeld Rekursionsformeln abgeleitet worden sind, werden die erzwungenen, ungedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingungen untersucht. Von diesen waren der sogenannte Resonanzfall und Nachbarfälle der Resonanz bei hinreichend schwacher Erregung der analytischen Behandlung zugänglich. Im Falle des symmetrischen Kraftfeldes können die Gleichungen im sogenannten Resonanzfall bei beliebig starker Erregung analytisch gelöst werden. Es ergibt sich, daß das Verhalten der maximalen Ausschläge von dem Größenverhältnis der Coulombschen Reibung und der Erregung abhängt. Je nachdem die erste über die zweite vorherrscht oder nicht bzw. sie gerade kompensiert, nehmen die maximalen Ausschläge ab oder zu bzw. bleiben konstant. Bei den Gleichungen mit symmetrischem Kraftfeld wird außerdem der Fall hinreichend kleiner Erregung mit hinreichend großer Frequenz behandelt, wobei sich ergibt, daß die maximalen Ausschläge in der Nähe des Haftbereiches nach einer quasi-arithmetischen Progression abnehmen, die sich der rein arithmetischen umso mehr nähert, je kleiner die Erregung und Reibung und je größer die Frequenz sind. Die freien, ungedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingungen ergeben sich als nicht-isochron, die erzwungenen dagegen unter den oben angegebenen Voraussetzungen als isochron, mit Ausnahme des Falles der hinreichend kleinen Erregung mit hinreichend großer Frequenz im symmetrischen Kraftfeld. Für die freien, linear bzw. quadratisch gedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingungeu werden Amplitudengesetze abgeleitet, die notwendige und unter einer gewissen Annahme notwendige und hinreichende Bedingungen dafür liefern, daß die Schwingung durch einen Coulombschen Widerstand und eine lineare bzw. quadratische Dämpfung gehemmt wird. Für den Fall der linear gedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingung werden die für die maximalen Ausschläge sich ergebenden Gesetzmäßigkeiten an Hand eines einfachen Versuches bestätigt. Die Untersuchung der freien, linear gedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingung bei »starker« Dämpfung lehrt, daß auch hier wie bei den harmonischen Schwingungen ohne Reibung aperiodische Bewegungen auftreten mit dem Unterschied, daß sie erstens »absterben« und nicht nur »abklingen« wie die harmonischen Schwingungen, und daß sie zweitens — aber nur im Falle des unsymmetrischen Kraftfeldes — eine Phase mehr haben können, wie die harmonischen Schwingungen. Während die freien, linear gedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingungen isochron verlaufen, sind die freien, quadratisch gedämpften Schwingungen nicht-isochron; ihre Schwingungszeiten vergrößern sich mit abnehmendem maximalen Ausschlag, ohne jedoch eine bestimmte, leicht angebbare Grenze zu überschreiten.

2. Freie, ungedämpfte, pseudoharmonische Reibungsschwingungen. Die Differentialgleichung der freien, ungedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingung hat die Gestalt:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x - \beta x^2 - \gamma x^3 \pm R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

In dieser allgemeinen Gleichung sind die spezielle Gleichung unsymmetrischer Schwingung:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x - \beta x^2 \pm R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mit $\gamma = 0$ und die Gleichung symmetrischer Schwingung:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x - \gamma x^3 \pm R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mit $\beta = 0$ enthalten.

Wir setzen voraus $\alpha^2 \gg \beta$ und $\alpha^2 \gg \gamma$ (1. Voraussetzung) und nehmen zunächst an, daß β und γ positiv sind. Man sieht leicht ein, daß diese Annahme keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Der Haftbereich ist gegeben durch:

$$d_1 \leqq x \leqq d_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wo

$$d_1 \approx -\frac{R}{\alpha^2}\left\{1-\beta\frac{R}{\alpha^4}+\gamma\frac{R^2}{\alpha^6}\right\}>0 \quad \text{bzw.} \quad d_2 \approx +\frac{R}{\alpha^2}\left\{1+\beta\frac{R}{\alpha^4}+\gamma\frac{R^2}{\alpha^6}\right\} \quad . \quad . \quad (4')$$

als nach dem Iterationsverfahren gewonnene Lösungen der Gleichungen

$$\alpha^2 x-\beta x^2-\gamma x^3+R=0 \ [\text{für } \dot{x}>0] \quad \text{bzw.} \quad \alpha^2 x-\beta x^2-\gamma x^3-R=0 \ [\text{für } \dot{x}<0]$$

definiert sind.

Der Haftbereich liegt wegen der Unsymmetrie des Kraftfeldes unsymmetrisch zur Zeitachse, und es ist

$$|d_1| < |d_2| \, .$$

Wir beginnen mit einem Hingang, also

$$\ddot{x}+\alpha^2 x-\beta x^2-\gamma x^3+R=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Nach Bildung der Leistungsgleichung — durch Multiplikation mit $\dot{x}$ — und Integration derselben, ergibt sich:

$$\dot{x}^2 = -\alpha^2 x^2+{}^2/_3\beta x^3+{}^1/_2\gamma x^4-2Rx+M_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

wo zur Bestimmung der Konstanten

$$M_0=\dot{x}_0{}^2+\alpha^2 x_0{}^2-{}^2/_3\beta x_0{}^3-{}^1/_2\gamma x_0{}^4+2Rx_0$$

angenommen worden ist, daß der Punkt zur Zeit $t=0$ den Ausschlag $x=x_0$ $(x_0<0)$ und die Geschwindigkeit $\dot{x}=x_0$ $(\dot{x}_0>0)$ hat.

Wir beschränken unsere Untersuchung auf die Nähe des Haftbereiches (2. Voraussetzung), setzen, da wir einen Hingang behandeln:

$$x=d_1+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und erhalten, indem wir y als »klein« betrachten, d. h. die dritten und höheren Potenzen vernächlässigen, aus (6)

$$\dot{y}^2=-\alpha_1{}^2y^2+u_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Dabei bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1{}^2&=\alpha^2-2\beta d_1-3\gamma d_1{}^2>0\\ u_0&=M_0-\alpha_1{}^2d_1{}^2+{}^2/_3\beta d_1{}^3+{}^1/_2\gamma d_1{}^4-2Rd_1>0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Aus (8) ergibt sich mit Rücksicht auf (7):

$$x=d_1+\frac{1}{\alpha_1}\sqrt[+]{u_0}\sin(\alpha_1 t+\delta_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wo die Phasenkonstante

$$\delta_0=\arcsin\frac{\alpha_1(x-d_1)}{\sqrt[+]{u_0}}>0$$

ist.

Gl. (10) gilt so lange, bis die Bewegung umkehrt. Der Zeitpunkt der Bewegungsumkehr bestimmt sich aus $\dot{x}=0$ zu

$$t_1=\frac{\pi/2-\delta_0}{\alpha_1},$$

wo der Ausschlag x den Wert

$$x_1=d_1+\frac{1}{\alpha_1}\sqrt{u_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

annimmt.

Da wir mit einem Hingang begonnen haben, liegt der nächste Umkehrpunkt (x_1) entweder innerhalb bzw. auf den Grenzen des Haftbereiches oder außerhalb des Haftbereiches auf der positiven Seite der x-Achse; es ist also auf jeden Fall (x_1-d_1) nicht negativ. Aus diesem Grunde ist von der Quadratwurzel das positive Zeichen zu nehmen.

Wenn $x_1>d_2$ ist, schließt sich eine neue Halbschwingung an, für welche die Differentialgleichung

$$\ddot{x}+\alpha^2 x-\beta x^2-\gamma x^3-R=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

gilt.

Durch einen analogen Prozeß wie bei Gl. (5) erhalten wir aus (12)

$$x = d_2 + \frac{1}{\alpha_2}\sqrt{u_1}\sin(\alpha_2 t + \delta_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \arcsin\frac{\alpha_2 (x_1 - d_2)}{\sqrt{u_1}} < 0 \\ u_1 &= M_1 - \alpha^2 d_2^2 + {}^2/_3\,\beta\, d_2^3 + {}^1/_2\,\gamma\, d_2^4 + 2\,R\,d_2 > 0 \\ M_1 &= \alpha_2\, x_1^2 - {}^2/_3\,\beta\, x_1^3 - {}^1/_2\,\gamma\, x_1^4 - 2\,R\,x_1 \\ \alpha_2^2 &= \alpha^2 - 2\,\beta\, d_2 - 3\,\gamma\, d_2^2 > 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13')$$

bedeuten.

Gl. (13) gilt während der ersten Rückschwingung. $\dot{x} = 0$ lehrt, daß zur Zeit

$$t_2 = \frac{\pi/2 - \delta_1}{\alpha_2}$$

die Bewegung das zweite Mal an der Stelle

$$x_2 = d_2 + \frac{1}{\alpha_2}\sqrt{u_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

umkehrt. Von der Quadratwurzel ist hier aus demselben Grunde wie oben das negative Zeichen zu nehmen.

Falls $|x_2| > |d_1|$ ist, schließt sich eine neue Halbschwingung an usw.

Wir schreiben die maximalen Ausschläge noch einmal zusammenhängend auf:

$$\left.\begin{aligned} x_0 & \\ x_1 &= d_1 + 1/\alpha_1 \sqrt{u_0} \\ u_0 &= \alpha^2 (x_0^2 - d_1^2) - {}^2/_3\,\beta\,(x_0^3 - d_1^3) - {}^1/_2\,\gamma\,(x_0^4 - d_1^4) + 2\,R\,(x_0 - d_1) + \dot{x}_0^2 \\ x_2 &= d_2 + 1/\alpha_2 \sqrt{u_1} \\ u_1 &= \alpha^2 (x_1^2 - d_2^2) - {}^2/_3\,\beta\,(x_1^3 - d_2^3) - {}^1/_2\,\gamma\,(x_1^4 - d_2^4) - 2\,R\,(x_1 - d_2) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

usw. in leicht ersichtlicher Folge.

Diese Beziehungen sind Rekursionsformeln für die maximalen Ausschläge der freien, ungedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingung in der Nähe des Haftbereiches. Die Ausschläge nehmen, wie leicht nachzuweisen, in der Tat fortgesetzt ab.

Die Schwingungen sind nicht isochron. Dies erklärt sich dadurch, daß die Schwingungszeiten vom Anfangszustand abhängen.

Die für die n-te Halbschwingung verfügbare potentielle Energie ergibt sich aus:

$$U_n = \{ {}^1/_2\,\alpha^2 x^2 - {}^1/_3\,\beta x^3 - {}^1/_4\,\gamma\, x^4 \}_{x = x_n}$$

zu

$$\begin{aligned} U_n = {}^1/_2\,\alpha^2 & \left\{ d_\varrho + (-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha_\varrho}\sqrt{u_{n-1}} \right\}^2 \\ - {}^1/_3\,\beta & \left\{ d_\varrho + (-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha_\varrho}\sqrt{u_{n-1}} \right\}^3 \\ - {}^1/_4\,\gamma & \left\{ d_\varrho + (-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha_\varrho}\sqrt{u_{n-1}} \right\}^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16) \end{aligned}$$

[$n = 1, 2, 3, \ldots$ $\varrho = 1$ für n gerade,
$\varrho = 2$ für n ungerade].

Der besondere Fall unsymmetrischer Schwingung mit $\gamma = 0$ bietet gegenüber dem vorstehenden allgemeinen unwesentlich Neues.

Mehr Interesse beanspruchen die symmetrischen Schwingungen, die der Gleichung

$$\ddot{x} + \alpha^2 x - \gamma\, x^3 \pm R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

mit $\beta = 0$ gehorchen.

Wegen der Symmetrie des Kraftfeldes liegt in diesem Fall der Haftbereich symmetrisch zur Zeitachse; er ist gegeben durch

$$-d \leqq x \leqq +d,$$

wo

$$d \approx \frac{R}{\alpha^2}\left\{1 + \gamma\frac{R^2}{\alpha^6}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

bedeutet.

Die Rekursionsformeln für die maximalen Ausschläge ergeben sich zu:

$$\left.\begin{aligned} x_0 & \\ x_1 &= -d + 1/\alpha_3 \sqrt{s_0} \\ & \quad + \\ s_0 &= \alpha^3 (x_0^2 - d^2) - \gamma/2\,(x_0^4 - d^4) + 2\,R\,(x_0 + d) + \dot{x}_0^2 \\ x_2 &= \quad d \quad + 1/\alpha_3 \sqrt{s_1} \\ s_1 &= \alpha^2 (x_1^2 - d^2) - \gamma/2\,(x_1^4 - d^4) - 2\,R\,(x_1 - d) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (16)$$

usw., wo

$$\alpha_3^2 = \alpha^2 - 3\,\gamma\,d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19').$$

Für $\gamma = 0$ und damit $d = \frac{R}{\alpha^2}$ erhalten wir natürlich das Amplitudengesetz der freien, harmonischen Reibungsschwingung zurück. [1])

Die Schwingungen verlaufen im symmetrischen Falle aus demselben Grunde wie im unsymmetrischen nicht-isochron.

Die für die n-te Halbschwingung verfügbare potentielle Energie ergibt sich aus:

$$U_n = \{ {}^1/_2\,\alpha^2 x^2 - {}^1/_4\,\gamma\,x^4 \}_{x = x_n}$$

zu

$$U_n = {}^1/_2\,\alpha^2 d^2 - {}^1/_4\,\gamma\,d^4 - \frac{d\sqrt{s_{n-1}}}{\alpha_3}(\alpha^2 - \gamma\,d^2) + \frac{s_{n-1}}{2\,\alpha_2^2}\left(\alpha_3^2 - {}^1/_2\,\gamma\,\frac{s_{n-1}}{\alpha_3^2}\right) + \frac{d\,\gamma}{2\,\alpha_3^2}\sqrt{s_{n-1}}^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

3. Erzwungene, ungedämpfte, pseudoharmonische Reibungsschwingungen.

Die Differentialgleichung der erzwungenen, ungedämpften und pseudoharmonischen Reibungsschwingung lautet, wenn die erregende Kraft harmonisch mit der Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$ wechselt:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x - \beta x^2 - \gamma x^3 \pm R = k \sin \omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Es sei $\alpha^2 \gg \beta$; $\alpha^2 \gg \gamma$ und zunächst $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Mit dieser Voraussetzung ist der Haftbereich gegeben durch

$$h_1 \leqq x \leqq h_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

wo

$$\left.\begin{aligned} h_1 = & -\frac{R}{\alpha^2}\left(1 - \beta\frac{R}{\alpha^4} + \gamma\frac{R^2}{\alpha^6}\right) + \frac{k}{\alpha^2}\left(1 - 2\,\beta\frac{R}{\alpha^4} + 3\,\gamma\frac{R^2}{\alpha^6}\right)\sin\omega t \\ & + \frac{k^2}{\alpha^4}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} - 3\frac{R}{\alpha^4}\right)\sin^2\omega t + \frac{\gamma}{\alpha^2}\frac{k^3}{\alpha^6}\sin^3\omega t \\ h_2 = & \quad \frac{R}{\alpha^2}\left(1 + \beta\frac{R}{\alpha^4} + \gamma\frac{R^2}{\alpha^6}\right) + \frac{k}{\alpha^2}\left(1 + 2\,\beta\frac{R}{\alpha^4} + 3\,\gamma\frac{R^2}{\alpha^6}\right)\sin\omega t \\ & + \frac{k^2}{\alpha^4}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} + 3\frac{R}{\alpha^4}\right)\sin^2\omega t + \frac{\gamma}{\alpha^2}\frac{k^3}{\nu^6}\sin^3\omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad (22')$$

bedeuten.

Der Haftbereich ist also nicht von zwei Parallelen zur Zeitachse wie bei den freien Reibungsschwingungen, sondern von zwei wellenartigen Linienzügen mit der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ begrenzt.

Hier ist es zweckmäßig, die Fälle mit symmetrischem und unsymmetrischem Kraftfeld gesondert zu behandeln. Wir untersuchen zunächst den ersten Fall; setzen also $\beta = 0$.

Da eine strenge Lösung der Gl. (21) mit $\beta = 0$ bisher nicht bekannt ist, beschränken wir unsere Untersuchung wieder auf die Nähe des Haftbereiches. Beginnend an einem Umkehrpunkt ($x_1 > 0$) mit einem Rückgang zur Zeit $t = 0$ setzen wir:

$$x = h_{2\,(t=0;\,\beta=0)} + y,$$

d. h. wegen

$$h_{2\,(t=0;\,\beta=0)} = \frac{R}{\alpha^2}\left(1 + \gamma\frac{R^2}{\alpha^6}\right) = d \quad \text{[Vergl. Gl. (18)]}.$$

$$x = d + y;$$

y ist dabei als »klein« zu betrachten.

[1]) Vergl. z. B. G. Hamel, El. Mechanik, Leipzig 1922, S. 95 ff.

Indem wir dies in Gl. (21) mit $\beta = 0$ einsetzen und die zweiten und höheren Potenzen von y vernachlässigen, erhalten wir:

$$\ddot{y} + \alpha_3^2 y = k \sin \omega t; \quad \alpha_3^2 = \alpha^2 - 3\gamma d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Daraus folgt mit:

$$x = x_1 \ (x_1 > 0), \ \dot{x} = 0 \text{ für } t = 0.$$

$$x = d - \frac{1}{\alpha_3 \alpha_3^2 - \omega} \frac{k\omega}{} \sin \alpha_3 t + (x_1 - d) \cos \alpha_3 t + \frac{k}{\alpha_3^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad . \quad . \quad (24).$$

Diese Gleichung gilt bis zur nächsten Bewegungsumkehr. $\dot{x} = 0$ liefert eine transzendente Gleichung der Gestalt:

$$a_1 \sin \alpha_3 t + a_2 \cos \alpha_3 t + a_3 \cos \omega t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

welche nach t i. A. analytisch nicht auflösbar ist. Die Kenntnis dieses Wertes für t ist aber erforderlich, da sich durch ihn der Ausschlag am Umkehrpunkt bestimmt.

Die analytische Auflösung dieser Gleichung kann aber bewerkstelligt werden, wenn zwischen der Frequenz der Eigenschwingung (α_3) und der erzwungenen (ω) die folgenden einfachen Beziehungen bestehen:

1. $\omega =$ Eigenfrequenz,
2. $\omega =$ Eigenfrequenz $- \varepsilon$ [ε »klein«],
3. $\omega = n \times$ Eigenfrequenz [n »groß«].

1. Fall. $\omega = \alpha_3$ (Eigenfrequenz) bedeutet den Fall der »Resonanz«. Wir behalten für die Beziehung $\omega = \alpha_3$ die Ausdrucksweise Resonanz formal bei, obgleich wir bei einer pseudoharmonischen Schwingung von Resonanz im eigentlichen Sinne nicht reden dürfen.[1])

Da G. Duffing gezeigt hat, daß der Hauptteil der pseudoharmonischen Schwingung im sog. Resonanzfall gegenüber dem Antriebe eine Phasenverschiebung von 180^0 hat, ersetzen wir in Gl. (21) t durch $t + \pi$, was darauf hinaus kommt, k mit $-k$ zu vertauschen [auch in (22') und (24)].

Damit ergibt sich aus (24):

$$x = d + \frac{1}{2\alpha_3^2} \{ -k \sin \alpha_3 t + [2\alpha_3^2 (x_1 - d) + k\alpha_3 t] \cos \alpha_3 t \} \quad . \quad . \quad (26).$$

Diese Gleichung gilt bis zur nächsten Bewegungsumkehr. $\dot{x} = 0$ liefert

$$[2\alpha_3^2 (x_1 - d) + k\alpha_3 t] \sin \alpha_3 t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26'),$$

woraus wegen $x_1 > d$ und $t > 0$ folgt:

$$\sin \alpha_3 t = 0$$

oder

$$t_1 = \frac{\pi}{\alpha_3}.$$

Zur Zeit t_1 kehrt die Bewegung zum ersten Mal um, der Ausschlag nimmt an dieser Stelle den Wert an:

$$x_2 = -(x_1 - 2d) - \frac{k\pi}{2\alpha_3^2} > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Der sich hier für den Fall $|x_2| > d$ anschließende Hingang ist charakterisiert durch die Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x - \gamma x^3 \pm R = -k \sin \omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Jetzt haben wir zu setzen:

$$x = h_1 \left(t = \frac{\pi}{\alpha_3}; \beta = 0\right) + y,$$

$$x = -d + y.$$

Damit und mit $\omega = \alpha_3$ erhalten wir unter Beachtung der Anfangsbedingungen

$$x = x_2 \ (x_2 > 0), \ \alpha = 0 \text{ für } t = \frac{\pi}{\alpha_3}$$

aus (28)

$$x = -d + \frac{1}{2\alpha_3^2} \{ -k \sin \alpha_3 t + [-2\alpha_3^2 (x_2 + d) - k\pi + k\alpha_3 t] \cos \alpha_3 t \} \quad . \quad (29).$$

[1]) Vergl. Duffing, a. a. O. S. 73 und 76.

Wenn $\dot{x}$ verschwindet, hört die Gültigkeit dieser Gleichung auf. $\dot{x} = 0$ ergibt:

$$\left[-2\,\alpha_3{}^2\,(x_2 + d) + k\,\alpha_3 \left(t - \frac{\pi}{\alpha_3} \right) \right] \sin \alpha_3\, t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29').$$

oder wegen $x_2 < 0$; $|x_2| > d$ und $t > \frac{\pi}{\alpha_3}$

$$\sin \alpha_3\, t = 0\,;\ \text{d. h. } t = \frac{2\,\pi}{\alpha_3}.$$

Zur Zeit t_2 wird der zweite Umkehrpunkt an der Stelle

$$x_3 = -\,(x_2 + 2\,d) + \frac{k\,\pi}{2\,\alpha_3{}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

erreicht. Falls $x_3 > d$ ist, schließt sich hier eine neue Halbschwingung an und so fort.

Die maximalen Ausschläge schreiben wir, etwas umgeformt, noch einmal zusammenhängend auf:

$$x_1\,, \quad x_2 = -\,(x_1 - 2\,d) - \frac{k\,\pi}{2\,\alpha_3{}^2}\,, \quad x_3 = (x_1 - 4\,d) + 2\,\frac{k\,\pi}{2\,\alpha_3{}^2}, \ldots \quad . \quad (31)$$

usw. Entsprechend den drei Fällen

$$d \gtrless \frac{k\,\pi}{4\,\alpha_3{}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

nehmen die maximalen Ausschläge in arithmetischer Progression ab bzw. bleiben konstant bzw. nehmen in arithmetischer Progression zu. Das arithmetische Dekrement bzw. Inkrement[1]) im ersten bzw. dritten Fall ist durch

$$D = \frac{2\,R}{\alpha^2}\left(1 + \gamma\,\frac{R^2}{\alpha^6}\right) - \frac{k\,\pi}{2\left\{\alpha^2 - 3\,\gamma\,\frac{R^2}{\alpha^4}\left[1 + \gamma\,\frac{R^2}{\alpha^6}\right]\right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32')$$

bzw.

$$J = \frac{k\,\pi}{2\left\{\alpha^2 - 3\,\gamma\,\frac{R^2}{\alpha^4}\left[1 + \gamma\,\frac{R^2}{\alpha^6}\right]\right\}} - \frac{2\,R}{\alpha^2}\left(1 + \gamma\,\frac{R^2}{\alpha^6}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32'')$$

gegeben.

Zur weiteren Diskussion der drei Fälle beziehen wir die Größen k, γ und R auf die Größe α^2, d. h. auf die Restitutionskraft der harmonischen Schwingung für die Entfernung 1 aus der Mittellage, schreiben also:

$$\frac{k}{\alpha^2} = k_0\,, \qquad \frac{\gamma}{\alpha^2} = \gamma_0\,, \qquad \frac{R}{\alpha^2} = R_0$$

und setzen

$$\gamma_0\,R_0{}^2 = u\,, \qquad \frac{k_0}{R_0} \cdot \frac{\pi}{4} = v \qquad (v \text{ stets positiv!})$$

Dann können wir die Beziehung (32) in der übersichtlichen Form schreiben

$$v \lessgtr f(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

mit $f(u) = (1 + u)\,[1 - 3\,u\,(1 + u^2)]$.

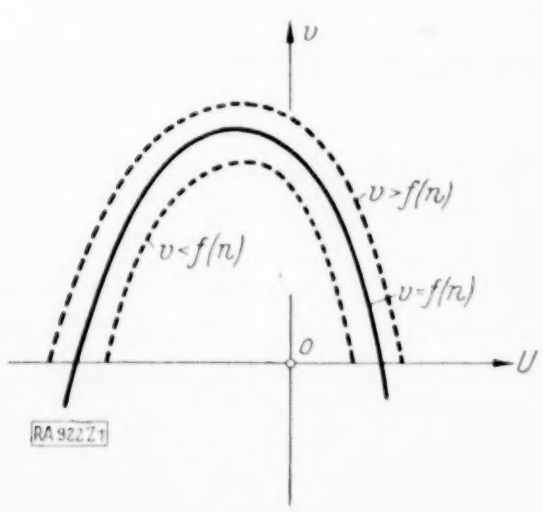


Abb. 1.

Die Funktion $(f\,u)$ hat die in der Abb. 1. angegebene Gestalt.

Da unsere Formeln nur in der Nähe des Haftbereiches gelten, muß

$$x_\nu - d \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

»klein« sein; dabei bedeutet x_ν die Ordinate des maximalen Ausschlages und d die des Haftbereiches. Den Wert für x_ν aus (31) eingesetzt, gibt nach einer einfachen Rechnung mit den obigen Bezeichnungen:

$$\frac{(x_1 - d)}{\nu - 1} + \frac{v}{1 - 3\,u\,(1 + u^2)} - (1 + u) \qquad (\nu = 2, 3\ 4, \ldots)\,.$$

Dieser Ausdruck muß also »klein« sein. Nun ist das erste Glied »klein«, denn $(x_1 - d)$ ist es nach Voraussetzung, und der ganzzahlige Nenner $(\nu - 1)$ wirkt nur

[1]) Unter dem arithmetischen Dekrement (Inkrement) verstehen wir die konstante Differenz zweier aufeinanderfolgenden maximalen Ausschläge.

günstig. Damit also der ganze Ausdruck »klein« ist, muß $|v - f(u)|$ »klein« sein, d. h. der Bereich der in Betracht kommenden Punkte (u, v) ist durch den aus Abb. 1 ersichtlichen Streifen zwischen den strichpunktierten Linien und der u-Achse (welcher durch Parallelverschiebung der Kurve $v = f(u)$ um das zulässige Stück nach oben und unten entstanden zu denken ist) gegeben.

Dem Kleiner- bzw. Größerzeichen in der Beziehung (33) entspricht das Gebiet unterhalb der Kurve (das Gebiet der konvergenten Schwingungen) bzw. oberhalb der Kurve (das Gebiet der divergenten Schwingungen). Punkten der Kurve selbst entspricht das Gleichheitszeichen. Die maximalen Ausschläge nehmen also ab bzw. zu oder bleiben konstant, je nachdem die den Größen k und R durch die Beziehungen

$$\gamma_0 R_0^2 = u \qquad \frac{k_0}{R_0} \cdot \frac{\pi}{4} = v$$

zugeordneten Punkte mit den Koordinaten u und v innerhalb bzw. außerhalb oder auf der Kurve liegen.

Für großes (kleines) R und festes k wird u groß (klein) und v klein (groß); d. h. der Punkt (u, v) liegt in dem Konvergenzgebiet (Divergenzgebiet).

Die Schwingungen sind isochron, und zwar beträgt die Schwingungszeit einer Halbschwingung: $T = \frac{\pi}{a_3}$.

Die für die n-te Halbschwingung verfügbare potentielle Energie ist gegeben durch:

$$U_n = \frac{1}{2}\alpha^2 \left\{(n-1)^2 \left(2d - \frac{k\pi}{2\alpha_3^2}\right)^2 + x_1^2 - 2x_1(n-1)\left(2d - \frac{k\pi}{2\alpha_3^2}\right)\right\}$$
$$- \frac{1}{4}\gamma \left\{(n-1)^4 \left(2d - \frac{k\pi}{2\alpha_3^2}\right)^4 - 4x_1(n-1)^3 \left(2d - \frac{k\pi}{2\alpha_3^2}\right)^3\right.$$
$$\left. + 6x_1^2(n-1)^2 \left(2d - \frac{k\pi}{2\alpha_3^2}\right)^2 - 4x_1^3(n-1)\left(2d - \frac{k\pi}{2\alpha_3^2}\right) + x_1^4\right\}$$
$$(n = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Für $d = \frac{k\pi}{4\alpha_3^2}$ bekommen wir

$$U_n = {}^1/_2\,\alpha^2 x_1^2 - {}^1/_4\,\gamma x_1^4 = \text{konst.},$$

d. h. die potentielle Energie in den Umkehrpunkten ist in diesem Fall während der ganzen Bewegung konstant, wie es auch sein muß.

2. Fall: Während der sog. Resonanzfall der pseudoharmonischen, symmetrischen, ungedämpften, erzwungenen Reibungsschwingung in der Nähe des Haftbereiches der analytischen Behandlung zugänglich ist, bieten schon die Nachbarfälle der sog. Resonanz erhebliche Schwierigkeiten. Die Behandlung des ersteren Falles gestaltet sich deshalb einfach, weil die Bewegung, ausgehend von einem passend gewählten Anfangszustand, an Stellen umkehrt, deren entsprechende Ordinaten des Haftbereiches für sämtliche Umkehrpunkte absolut genommen denselben Wert haben und weil demnach die Eigenfrequenzen (α_3) der einzelnen Schwingungsphasen von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt sämtlich einander gleich sind. In den Nachbarfällen der sog. Resonanz ist dies nicht erfüllt, was die Verfolgung des Bewegungsvorganges außerordentlich erschwert.

Wir können aber dem Problem dadurch näher kommen, daß wir hinreichend kleine Erregung (k) voraussetzen. Der Haftbereich ist dann gegeben durch

$$h_1 \leqq x \leqq h_2\,,$$

wo jetzt

$$h_1 = -d - \eta = -h\,, \qquad h_2 = +d + \eta = +h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

sind. Dabei bedeutet d die Ordinate des Haftbereiches der freien Schwingung und η das maximale Zusatzglied, welches von der Erregung herrührt und nach Voraussetzung eine »kleine« Größe ist. Das bedeutet, daß wir den von zwei wellenartigen Linienzügen begrenzten Haftbereich durch einen Parallelstreifen zur Zeitachse ersetzt haben, der den ersteren ganz einschließt und die Breite $2h$ besitzt.

Wenn wir nun substituieren:

$$x = \pm h + y\,,$$

so ist y stets »klein«, denn die Abweichung der Geraden $x = \pm h$ von den tatsächlichen Grenzen des Haftbereiches ist nach Voraussetzung gering.

Unter der Beachtung, daß

$$\cos \varepsilon t \approx 1 \quad \text{und} \quad \sin \varepsilon t \approx \varepsilon t$$

ist, erhalten wir nach einer der im ersten Fall angedeuteten analogen Rechnung das Gesetz der maximalen Ausschläge in der Gestalt:

$$x_1, \quad x_2 = -\left[x_1 - 2\left(h - \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right) - \frac{k\,\pi/\alpha_0}{2\,\alpha_0 - \varepsilon}\right], \quad x_3 = \left[x_1 - 4\left(h + \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right) + 2\,\frac{k\,\pi/\alpha_0}{2\,\alpha_0 - \varepsilon}\right] \tag{36}$$

usw., wo

$$a = \alpha^2 h - \gamma h^3 - R = \eta\,\{\alpha^2 - \gamma\,(3\,d^2 + 3\,d\,\eta) + \eta^3\} > 0, \quad {\alpha_0}^2 = \alpha^2 - 3\,\gamma\,h^2 > 0 \tag{36'}$$

bedeuten.

Da wir k als hinreichend klein angenommen haben, ist die Bedingung

$$2\left(h - \frac{a}{\alpha^2}\right) > \frac{k\,\pi/\alpha_0}{2\,\alpha_0 - \varepsilon}$$

im allgemeinen erfüllt. Die Gleichungen (36) lehren dann, daß die maximalen Ausschläge in einer arithmetischen Progression abnehmen mit dem arithmetischen Dekrement

$$D = 2\left(h - \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right) - \frac{k\,\pi/\alpha_0}{2\,\alpha_0 - \varepsilon}.$$

Dabei ist folgendes zu beachten: Wenn ein Umkehrpunkt in das Innere des Haftbereiches $-h \leqq x \leqq +h$ fällt, so kann er immer noch außerhalb der tatsächlichen Grenzen des Haftbereiches, d. h. im sog. Schwankungsgebiet liegen. Die Bewegung wird sich also in diesem Fall fortsetzen; es wird sich aber im allgemeinen nur eine Halbschwingung anschließen, da der Punkt, weil der Unterschied der tatsächlichen Grenzen des Haftbereiches vom Haftbereich $-h \leqq x \leqq +h$ nach Voraussetzung »klein« ist, bei der nächsten Bewegungsumkehr sich völlig im Innern des Haftbereiches befinden wird.

Nehmen wir neben hinreichend kleiner Erregung auch hinreichend kleine Reibung an, so können die maximalen Ausschläge auch konstant bleiben oder nach einer arithmetischen Progression zunehmen.

Die Schwingungen sind isochron; die Schwingungszeit einer Halbschwingung ist $T = \frac{\pi}{\alpha_0}$.

Die für die n-te Halbschwingung verfügbare potentielle Energie ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} U_n = \frac{1}{2}\,\alpha^2 \left\{x_1 - (n-1)\left[2\left(h - \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right) - \frac{k\,\pi/\alpha_0}{2\,\alpha_0 - \varepsilon}\right]\right\}^2 \\ - \frac{1}{4}\,\gamma \left\{x_1 - (n-1)\left[2\left(h - \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right) - \frac{k\,\pi/\alpha_0}{2\,\alpha_0 - \varepsilon}\right]\right\}^4 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Für $2\left(h - \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right) = \frac{k\,\pi/\alpha_0}{2\,\alpha_0 - \varepsilon}$ ist U_n konstant (unabhängig von n), wie es sein muß.

3. Fall. In diesem Fall setzen wir hinreichend kleine Erregung mit hinreichend großer Frequenz vorraus.

Nach dem Muster der im ersten Fall angedeuteten Rechnung erhalten wir mit $\omega = n\,\alpha_0$, wo n eine »große« Zahl bedeutet, für die maximalen Ausschläge dies:

$$\left.\begin{aligned} x_1 & \\ x_2 &= -\left\{x_1 - 2\left(h - \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right)\right\} - \delta_1 \\ x_3 &= \left\{x_1 - 4\left(h - \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right)\right\} + (\delta_1 + \delta_2) \\ x_4 &= -\left\{x_1 - 6\left(h_1 - \frac{a}{{\alpha_0}^2}\right)\right\} - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

usw., wo a und α_0 dieselbe Bedeutung haben wie im Fall 2 (vergl. Gl. 36') und die Größen δ_ν durch

$$\delta_\nu = \frac{1}{2}\,\frac{k^2 n^2}{{\alpha_0}^4 (n^2 - 1)^2} \cdot \frac{1}{|x_\nu| - h + \frac{a}{{\alpha_0}^2}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38')$$

gegeben sind.

Das Gleichungssystem (38) lehrt, daß die maximalen Ausschläge der symmetrischen, pseudoharmonischen, ungedämpften und erzwungenen Reibungsschwingung bei hinreichend

kleiner Erregung mit hinreichend großer Frequenz in der Nähe des Haftbereiches wegen $2\left(h - \frac{a}{{a_0}^2}\right) > \delta_1$, . . . nach einem quasi-arithmetischen Gesetz abnehmen. Diese quasi-arithmetische Progression nähert sich der arithmetischen um so mehr, je kleiner k und R sind und je größer die Zahl n ist, denn um so kleiner werden dann die Größen δ_ν.

Die Schwingungen sind nicht isochron, da die Schwingungszeiten vom Anfangszustand abhängen.

Wir behandeln nun die Schwingung mit unsymmetrischem Kraftfeld; es sei also in Gl. (21) wieder $\beta \neq 0$.

Wiederum beschränken wir uns auf die Nähe des Haftbereiches und nehmen hinreichend kleine Erregung an. Die letztere Annahme hat zur Folge, daß der von zwei wellenartigen Linienzügen begrenzte Haftbereich durch einen Parallelstreifen zur Zeitachse ersetzt werden kann. Die Größen h_1 und h_2 in

$$h_1 \leqq x \leqq h_2$$

sind demnach gegeben durch

$$h_1 = d_1 + \eta_1\,, \qquad h_2 = d_2 + \eta_2 \;. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (39),$$

wo d_1 und d_2 die Ordinaten des Haftbereiches der freien Schwingung [vergl. Gl. (4′)] und η_1, η_2 die maximalen Zusatzglieder bedeuten, die von der Erregung herrühren und nach Voraussetzung »kleine« Größen sind.

Da aber trotz dieser beiden Annahmen das Problem der analytischen Behandlung immer noch erhebliche Schwierigkeiten bietet, weil zur Bestimmung der Zeiten der Umkehrpunkte transzendente Gleichungen der Gestalt

$$a \sin \alpha_2 t + a_1 \cos \alpha_2 t + a_3 \sin \omega t = 0$$

zu lösen sind, spezialisieren wir noch weiter und behandeln folgende zwei Fälle:

$$1)\ \omega = \alpha_2\,, \qquad 2)\ \omega = \alpha_1 - \varepsilon_1 = \alpha_2 - \varepsilon_2 \quad [\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ »klein«}];$$

wo $\qquad {\alpha_1}^2 = \alpha^2 - 2\,\beta\,h_1 - 3\,\gamma\,{h_1}^2\,, \qquad \alpha_2 = \alpha^2 - 2\,\beta\,h_2 - 3\,\gamma\,{h_2}^2$

bedeuten und $\qquad {\alpha_1}^2 > {\alpha_2}^2\,, \qquad h_2 > h_1$

für $\beta > 0$, $\gamma > 0$ sind.

Nach dem Muster der beim symmetrischen Kraftfeld durchgeführten Rechnung erhalten wir für die maximalen Ausschläge im ersten Fall:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\\ x_2 &= -\left\{x_1 - 2\left(h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2}\right)\right\} - \frac{k\,\pi}{2\,{\alpha_2}^2} \\ x_3 &= \left\{x_1 - 2\left[\left(h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2}\right) - \left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right)\right]\right\} + \frac{k\,\pi}{2\,{\alpha_2}^2} + \frac{k\,\pi/\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ x_4 &= -\left\{x_1 - 2\left[2\left(h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2}\right) - \left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right)\right]\right\} - 2\,\frac{k\,\pi}{2\,{\alpha_2}^2} - \frac{k\,\pi/\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (40)$$

usw., und im zweiten Fall:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\\ x_2 &= -\left\{x_1 - 2\left(h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2}\right)\right\} - \frac{k\,\pi/\alpha_1}{2\,\alpha_2 - \varepsilon_2} \\ x_3 &= \left\{x_1 - 2\left[\left(h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2}\right) - \left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right)\right]\right\} + \frac{k\,\pi/\alpha_2}{2\,\alpha_2 - \varepsilon_2} + \frac{k\,\pi/\alpha_1}{2\,\alpha_1 - \varepsilon_1} \\ x_4 &= -\left\{x_1 - 2\left[2\left(h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2}\right) - \left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right)\right]\right\} - 2\,\frac{k\,\pi/\alpha_2}{2\,\alpha_2 - \varepsilon_2} - \frac{k\,\pi/\alpha_1}{2\,\alpha_1 - \varepsilon_1} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

usw. Da wir die Erregung k als hinreichend klein angenommen haben, sind die Beziehungen

$$h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2} > \frac{k\,\pi}{4\,{\alpha_2}^2} \qquad \text{und} \qquad -\left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right) > \frac{k\,\pi/\alpha_1}{2\,(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad . \;.\;. \quad (42)$$

im allgemeinen erfüllt. Die Gleichungen (40) lehren dann, daß die maximalen Ausschläge — in der Nähe des Haftbereiches — in einer arithmetischen Progression abnehmen mit dem arithmetischen Dekrement

$$D_2 = 2\left(h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2}\right) - \frac{k\,\pi}{2\,{\alpha_2}^2} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (43)$$

für die Rückschwingung und

$$D_1 = -2\left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right) - \frac{k\pi/a_1}{a_1 + a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43')$$

für die Hinschwingung.

Infolge der Unsymmetrie des Kraftfeldes gilt für die Rückschwingung ein anderes arithmetisches Dekrement als für die Hinschwingung.

Man sieht leicht ein, daß

$$D_2 > D_1$$

ist, d. h. daß die Ausschläge bei einer Hinschwingung schwächer abnehmen als bei einer Rückschwingung.

Nehmen wir neben hinreichend kleiner Erregung auch hinreichend kleine Reibung an, so können die maximalen Ausschläge auch konstant bleiben oder nach einem arithmetischen Gesetz zunehmen, je nachdem in den Beziehungen:

$$h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2} \gtrless \frac{k\pi}{4\,{a_2}^2} \quad \text{und} \quad -\left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right) \lessgtr \frac{k\pi}{2\,(a_1 + a_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

das obere oder untere Zeichen gilt.

Weiter können die Beziehungen bestehen:

$$\left(h_2 - \frac{a_2}{{a_2}^2}\right) > \frac{k\pi}{4\,{a_2}^2}; \quad -\left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right) < \frac{k\pi}{2\,(a_1 + a_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

und

$$\left(h_2 - \frac{a_2}{a_2}\right) < \frac{k\pi}{4\,{a_2}^2}; \quad -\left(h_1 - \frac{a_1}{{a_1}^2}\right) > \frac{k\pi}{2\,(a_1 + a_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45').$$

Diese Fälle bieten aber, da sie nur über das Größenverhältnis der ersten beiden maximalen Ausschläge eine bestimmte Aussage gestatten, wenig Interesse.

Die Schwingungen sind einseitig isochron; d. h. die Schwingungszeiten sind für die Hin- und Rückschwingung je für sich konstant. Der einseitige Isochronismus ist in der Unsymmetrie des Kraftfeldes begründet.

Zum zweiten Fall (41) lassen sich analoge Bemerkungen machen.

4. Freie, linear gedämpfte, pseudoharmonische Reibungsschwingungen. Die Differentialgleichung der freien, linear gedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingung [1]) lautet:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + a^2 x - \beta x^2 - \gamma x^3 \pm R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Es sei $a^2 >> \beta$ und $a^2 >> \gamma$ [1. Voraussetzung] und zunächst angenommen, daß β und γ positiv sind. Wir beschränken unsere Untersuchung wieder auf die Nähe des Haftbereiches [2. Voraussetzung], der gegeben ist durch

$$d_1 \leqq x \leqq d_2,$$

wo d_1 und d_2 dieselbe Bedeutung haben wie in Gl. (4').

Unter der Voraussetzung geringer Dämpfung

$$\lambda^2 < a^2 - 2\beta d_2 - 3\gamma {d_2}^2 \quad \text{und} \quad \lambda^2 < a^2 - 2\beta d_1 - 3\gamma {d_1}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

(die erste Ungleichung zieht die zweite nach sich!) erhalten wir mit

$$\sqrt{\lambda^2 - (a^2 - 2\beta d_2 - 3\gamma {d_2}^2)} = i\nu_2 \quad \text{und} \quad \sqrt{\lambda^2 - (a^2 - 2\beta d_1 - 3\gamma {d_1}^2)} = i\nu_1 \quad (47')$$

in der bekannten Weise für die maximalen Ausschläge folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned} x_1 & \\ x_2 &= d_2 - (x_1 - d_2)\, e^{-\frac{\lambda}{\nu_2}\pi} \\ x_3 &= d_1 - (x_2 - d_1)\, e^{-\frac{\lambda}{\nu_1}\pi} \\ x_4 &= d_2 - (x_3 - d_2)\, e^{-\frac{\lambda}{\nu_2}\pi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

usw.

Die Größen $x_1, x_3, x_5, \ldots$ sind positiv; die Größen $x_2, x_4, x_6, \ldots$ dagegen negativ; das negative Zeichen ist in ihnen implizite enthalten.

---

[1]) Arbeiten über die harmonische, linear gedämpfte, freie Reibungsschwingung von: Wright, Phil. Mag. (6) 44, 1922, S. 1063. Rowell, Phil. Mag. (6) 44, 1922, S. 951 bis 953. Jankin-Thomas, Phil. Mag. (6) 47, 1924, S. 303 bis 306.

Mit den Abkürzungen

$$e^{-\frac{\lambda}{\nu_1}\pi} = U_1 \quad \text{und} \quad e^{-\frac{\lambda}{\nu_2}\pi} = U_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

ergibt sich aus (48)

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{x_3 - x_5}{x_1 - x_3} = U_1 U_2 = \text{konst.} & \frac{x_4 - x_6}{x_2 - x_4} = U_1 U_2 = \text{konst.} \\ \frac{x_5 - x_7}{x_3 - x_5} = U_1 U_2 = \text{konst.} & \frac{x_6 - x_8}{x_4 - x_6} = U_1 U_2 = \text{konst.} \\ \frac{x_7 - x_9}{x_5 - x_7} = U_1 U_2 = \text{konst.} & \frac{x_8 - x_{10}}{x_6 - x_8} = U_1 U_2 = \text{konst.} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

d. h. die Differenzenquotienten der positiven und die der negativen maximalen Ausschläge [1]) sind je für sich konstant, und zwar sind die Quotienten der beiden Serien konstant gleich $U_1 U_2$.

Die einfachen Quotienten der positiven und die der negativen maximalen Ausschläge

$$\frac{x_1}{x_3}; \frac{x_3}{x_5}; \frac{x_5}{x_7}; \ldots \quad \text{und} \quad \frac{x_2}{x_4}; \frac{x_4}{x_6}; \frac{x_6}{x_8}; \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

sind nicht konstant, wovon man sich leicht überzeugt. Die Konstanz der Quotienten (51) zieht aber die von (50) nach sich. Wir erhalten daher:

Die Konstanz der Differenzenquotienten der positiven und die der negativen maximalen Ausschläge und die Inkonstanz der einfachen Quotienten der positiven und die der negativen maximalen Ausschläge sind eine notwendige Bedingung dafür, daß eine freie, pseudoharmonische Schwingung durch eine lineare Dämpfung und einen Coulombschen Widerstand gehemmt wird.

Die Konstanz der Differenzenquotienten gestattet uns, den Dämpfungsfaktor λ und die Reibung R zu berechnen. Wir verfahren dabei folgendermaßen:

Wir bestimmen die maximalen Ausschläge und berechnen aus ihnen mit Hilfe der Gleichungen:

$$\frac{x_{2n+1} - x_{2n+3}}{x_{2n+2} - x_{2n}} = U_1, \quad \frac{x_{2n+2} - x_{2n}}{x_{2n-1} - x_{2n+1}} = U_2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

die Größen U_1 und U_2. Mittels ihrer Kenntnis finden wir aus:

$$\frac{x_{2n+1} + U_1 x_{2n}}{1 + U_1} = d_1 \; (< 0) \quad \frac{x_{2n} + U_2 x_{2n-1}}{1 + U_2} = d_2 \; (> 0) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad . \quad (53)$$

die Ordinaten d_1 und d_2 des Haftbereiches. Damit berechnen wir

$$\alpha^2 - 2\beta d_1 - 3\gamma d_1^2 = \lambda^2 + \nu_1^2 \quad \text{und} \quad \alpha^2 - 2\beta d_2 - 3\gamma d_2^2 = \lambda^2 + \nu_2^2$$

und ferner aus

$$U_1 = e^{-\frac{\lambda}{\nu_1}\pi} \quad \text{oder} \quad U_2 = e^{-\frac{\lambda}{\nu_2}\pi}$$

den linearen Dämpfungsfaktor λ; wir können ihn auf zwei Arten berechnen, haben also gleichzeitig eine Kontrolle.

Schließlich finden wir mit Hilfe von d_1 und d_2 die konstante Reibung R aus

$$R = \alpha^3 \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{2\beta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54),$$

sie ergibt sich aus Gl. (4').

Die Schwingungen sind einseitig isochron. Die Schwingungszeit für die Rückschwingung bzw. Hinschwingung ist gegeben durch

$$T_2 = \frac{\pi}{\nu_2} \quad \text{bzw.} \quad T_1 = \frac{\pi}{\nu_1}.$$

Die für die n-te Halbschwingung verfügbare potentielle Energie ergibt sich zu:

$$V_n = -\tfrac{1}{2}\alpha^2\{d_\varrho - (x_{n-1} - d_\varrho) U_\varrho\}^2 - \tfrac{1}{3}\beta\{d_\varrho - (x_{n-1} - d_\varrho) U_\varrho\}^3 - \tfrac{1}{4}\gamma\{d_\varrho - (x_{n-1} - d_\varrho) U_\varrho\}^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

$$\left(\begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \ldots \\ \varrho = 1 \text{ für } n \text{ ungerade} \\ \varrho = 2 \text{ für } n \text{ gerade} \end{array}\right).$$

---

[1]) So wollen wir kurz die maximalen Ausschläge x_ν mit ungeradzahligem oder geradzahligem Index nennen.

Im Falle des symmetrischen Kraftfeldes nimmt das Gleichungssystem (48) mit $\beta = 0$ und damit $d_1 = d_2 = d$ und $U_1 = U_2 = S$ nach einer einfachen Umformung die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} x_1 & \\ x_2 &= d - (x_1 - d)\,S \\ x_3 &= -\,d - 2\,d\,S + (x_1 - d)\,S^2 \\ x_4 &= d + 2\,d\,S - 2\,d\,S^2 - (x_1 - d)\,S^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

usw., woraus sich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{|x_2| - x_3}{x_1 - |x_2|} &= S = \text{konst.} \\ \frac{x_3 - |x_4|}{|x_2| - x_3} &= S = \text{konst.} \\ \frac{|x_4| - x_3}{x_3 - |x_4|} &= S = \text{konst.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

usw. Die Konstanz dieser Differenzenquotienten und die Inkonstanz der einfachen Quotienten $\frac{x_1}{|x_2|}$; $\frac{|x_2|}{x_3}$; $\frac{x_3}{|x_4|}$; . . . sind eine notwendige Bedingung dafür, daß — in der Nähe des Haftbereiches — eine freie, symmetrische, pseudoharmonische Reibungsschwingung überdies noch durch eine lineare Dämpfung gehemmt wird.

Zur (numerischen) Berechnung des Dämpfungsfaktors λ und der Reibung R bestimmen wir die Ausschläge der Umkehrpunkte und daraus nach (57) den konstanten Faktor

$$S = e^{-\frac{\lambda\,\pi}{\sqrt{\lambda^2 - (\alpha^2 - 3\,\gamma\,d^2)}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Den so gefundenen Wert für S in die Gleichungen

$$d = \frac{x_1\,S^n - |x_{n+1}|}{2\,\frac{S^n - 1}{S - 1} + S^n + 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

eingesetzt, ergibt durch Mittelbildung die Größe d. Daraufhin setzen wir d einerseits in Gl. (58) ein und berechnen daraus den linearen Dämpfungsfaktor λ und andererseits in Gleichung

$$R^3 + \frac{\alpha^6}{\gamma}\,R - \frac{\alpha^8\,d}{\gamma} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

ein und bestimmen daraus die konstante Reibung R.

Ueber die Durchführung einer solchen Rechnung an Hand eines einfachen Versuches siehe Abschnitt 6.

Die Schwingungen sind isochron[1]), und zwar beträgt die Schwingungszeit einer jeden Halbschwingung π/ν.

Die für die n-te Halbschwingung verfügbare potentielle Energie ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\left.\begin{aligned} U_n = {}^1\!/_2\,\alpha^2 &\left\{ x_1\,S^{n-1} - d\left[2\,\frac{S^n - 1}{S - 1} + S^n - 1\right]\right\}^2 \\ -\,{}^1\!/_4\,\gamma &\left\{ x_1\,S^{n-1} - d\left[2\,\frac{S^n - 1}{S - 1} + S^n - 1\right]\right\}^4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (61).$$

Wir sprechen noch einige charakteristische Fälle starker Dämpfung durch und behandeln zunächst die Schwingung mit symmetrischem Kraftfeld. Es sei $\lambda^2 > \alpha^2 - 3\,\gamma\,d^2$. Wir setzen die reelle Größe $\sqrt{\lambda^2 - (\alpha^2 - 3\,\gamma\,d^2)} = \lambda_0\ (> \lambda)$. Wie früher, beschränken wir uns auf die Nähe des Haftbereiches; ebenso sei $\alpha^2 \gg \gamma$ und zunächst $\gamma > 0$. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$u_1 = -\,\lambda + \lambda_0 < 0, \quad u_2 = -\,\lambda - \lambda_0 < 0, \quad |u_1| < |u_2|$$

und den Anfangsbedingungen:

$$x = x_0\ [x_0 < 0;\ |x_0| > d] \quad \text{und} \quad \dot{x} = \dot{x}_0\ (\dot{x}_0 > 0) \ \text{für}\ t = 0$$

erhalten wir dann als Bewegungsgleichung für die erste Halbschwingung

$$x = -\,d + \frac{-\,(x_0 + d)\,u_2 + \dot{x}_0}{2\,\lambda_0}\,e^{u_1\,t} + \frac{(x_0 + d)\,u_1 - \dot{x}_0}{2\,\lambda_0}\,e^{u_2\,t} \quad \ldots\ldots \quad (62).$$

---

[1]) Den Tautochronismus linear und quadratisch gedämpfter Schwingungen untersucht allgemein: Routh: Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Bd. 1, S. 488 bis 509.

Wenn x_0 und $\dot{x}_0$ die Bedingungen

$$|(x_0 + d)\, u_2| < |\dot{x}_0|\,; \quad |(x_0 + d)\, u_1| < |\dot{x}_0|$$

erfüllen, kann der Ausdruck für x niemals Null und noch weniger positiv werden. Er nimmt von $x = x_0$ für $t = 0$ ausgehend dem absoluten Betrage nach immer mehr ab und nähert sich für $t \to \infty$ dem Werte $x = -d$. Die Schwingung »klingt« in diesem Falle »ab«[1]). Das Weg-Zeit-Diagramm hat die in der Abb. 2 dargestellte Form.

Ist dagegen

$$|(x_0 + d)\, u_2| < |\dot{x}_0|\,; \quad |(x_0 + d)\, u_2| < |\dot{x}_0|\,,$$

so kann der Ausdruck für x einmal Null und dann positiv werden, bis an der Stelle:

$$x_1 = -d + \frac{-(x_0 + d)\, u_2 + \dot{x}_0}{u_1 - u_2} \left\{ \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{(x_0 + d)\, u_1 - \dot{x}_0}{(x_0 + d)\, u_2 - \dot{x}_9} \right\}^{\frac{u_1}{u_1 - u_2}} + \frac{(x_0 + d)\, u_1 - \dot{x}_0}{u_1 - u_2} \left\{ \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{(x_0 + d)\, u_1 - \dot{x}_0}{(x_0 + d)\, u_2 - \dot{x}_0} \right\}^{\frac{u_2}{u_1 - u_2}} \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

die Bewegung umkehrt.

Ist nun $x_1 \leqq d$, so ist die Bewegung hier zu Ende, da der Umkehrpunkt in das Innere bzw. auf die Grenze des Haftbereiches fällt. Die Schwingung »stirbt ab« (Abb. 2 a, 2 b).

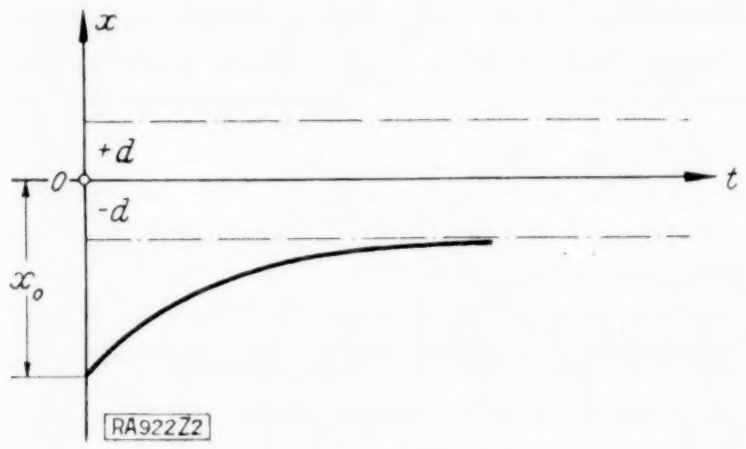


Abb. 2.

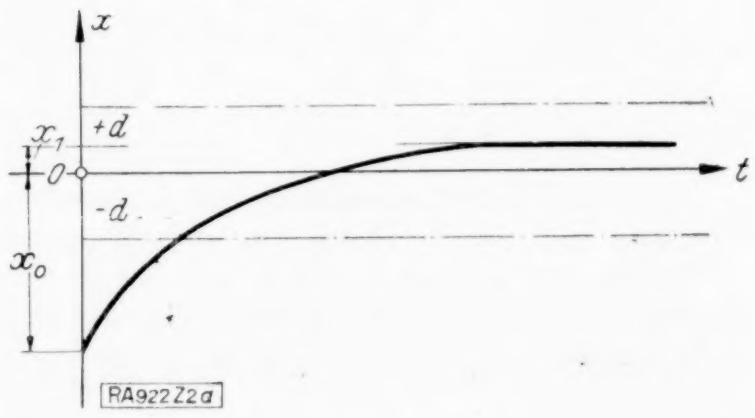


Abb. 2 a.

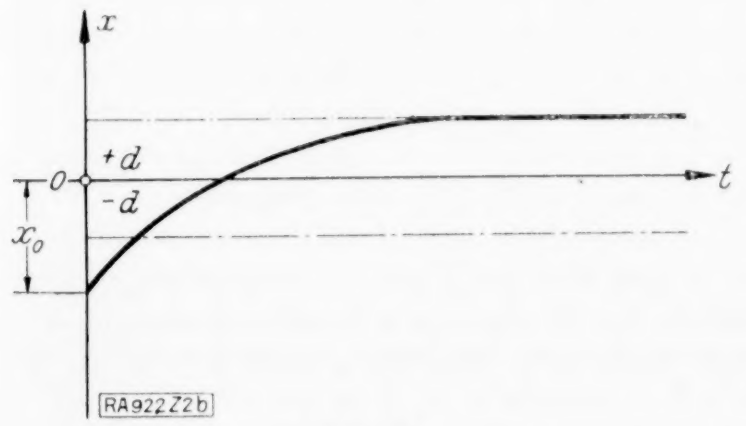


Abb. 2 b.

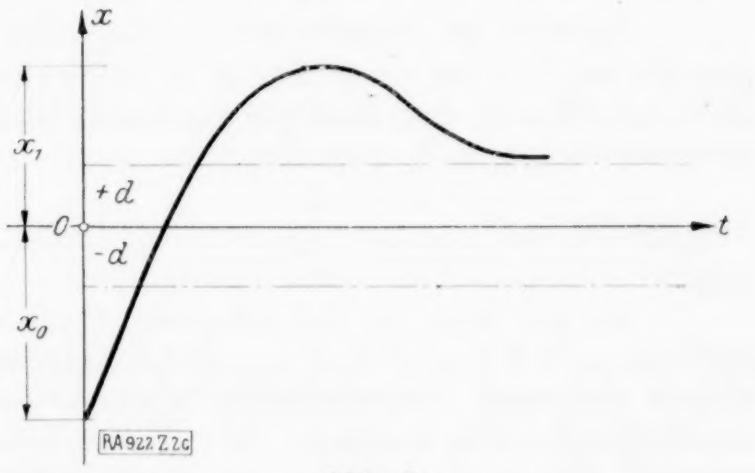


Abb. 2 c.

Ist dagegen $x_1 > d$, setzt sich die Bewegung fort. Es zeigt sich aber, daß der Ausschlag x nicht wieder Null werden kann, daß vielmehr die Schwingung sich mit wachsender Zeit der Geraden $x = +d$ allmählich anschmiegt, also »abklingt«. (Abb. 2 c).

Im Falle des unsymmetrischen Kraftfeldes setzen wir voraus:

$$\lambda^2 > \alpha^2 - 2\beta d_2 - 3\gamma d_2^{\,2} \quad \text{und} \quad \lambda^2 < \alpha^2 - 2\beta d_1 - 3\gamma d_1^{\,2} \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

---

[1]) Den Terminus »Abklingen« einer Schwingung wollen wir gebrauchen, wenn die Schwingung sich asymptotisch der Grenze des Haftbereiches nähert und theoretisch erst nach unendlich langer Zeit zur Ruhe kommt. Im Gegensatz dazu reden wir von einem »Absterben« der Schwingung, wenn sie nach endlicher Zeit zur Ruhe kommt, was dann der Fall ist, wenn ein Umkehrpunkt in das Innere bzw. auf die Grenze des Haftbereiches fällt.

und führen als abkürzende Bezeichnungen ein:

$$[\lambda^2-(\alpha^2-2\beta d_2-3\gamma d_2{}^2)]^{1/2}=\lambda_0 \text{ (reell!)} \qquad [\lambda^2-(\alpha^2-2\beta d_1-3\gamma d_1{}^2)]^{1/2}=i'\nu_1$$
$$u_1=-\lambda+\lambda_0$$
$$u_2=-\lambda-\lambda_0<0; \qquad |u_1|<|u_2|.$$

Die Beziehungen (64) charakterisieren eine einseitig aperiodische Bewegung, und zwar ist die Bewegung für den Hingang periodisch und für den Rückgang aperiodisch.

Nach einer dem symmetrischen Fall ganz analogen Rechnung ergibt sich mit Hilfe der Anfangsbedingungen

$$x=x_0\,(x_0>0); \qquad \dot{x}=\dot{x}_0\,(x_0<0) \text{ für } t=0$$

unter den Voraussetzungen:

$$|(x_0-d_2)\,u_2| \gtrless |\dot{x}_0|; \qquad |(x_0-d_2)\,u_1| \leqq |\dot{x}_0|\ ^1)$$

Abb. 3.

für die Schwingung das in der Abb. 3 dargestellte Diagramm.

Man übersieht leicht, daß die vorstehenden Betrachtungen mit unwesentlichen Aenderungen gültig bleiben, wenn einer der beiden Parameter β und γ oder beide negativ sind.

5. Freie, quadratisch gedämpfte, pseudoharmonische Reibungsschwingungen. Die allgemeine Differentialgleichung der freien, quadratisch gedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingung lautet:

$$\ddot{x}\pm p\dot{x}^2+\alpha^2x-\beta x^2-\gamma x^3\pm R=0\ ^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65).$$

Der Dämpfungsfaktor hat hier wie die Reibung wechselndes Vorzeichen, für den Hingang gilt das positive, für den Rückgang das negative Zeichen.

Es sei wieder $\alpha^2 \gg \beta$ und $\alpha^2 \gg \gamma$ (1. Voraussetzung) und zunächst $\beta>0$; $\gamma>0$. Ferner beschränken wir unsere Untersuchung wie bisher auf die Nähe des Haftbereiches 2. Voraussetzung), der gegeben ist durch

$$d_1 \leqq x \leqq d_2,$$

wo d_1 und d_2 dieselbe Bedeutung haben wie in Gl. (4').

In der bekannten Weise und unter Beachtung der von v. Jgnatowsky[3]) angegebenen Lösungsmethode einer Gleichung von der Form $\ddot{z}+p_0\dot{z}^2+\alpha_0{}^2z=0$ ergibt sich das Gesetz der maximalen Ausschläge der durch die Gl. (65) charakterisierten Reibungsschwingung in der Gestalt:

$$x_1, \quad x_2=x_1-\frac{2\,(x_1-d_2)}{1+2\,p\,(x_1-d_2)}, \quad x_3=x_2-\frac{2\,(x_2-d_1)}{1-2\,p\,(x_2-d_1)}, \quad x_4=x_3-\frac{2\,(x_1-d_2)}{1+2\,p\,(x_1-d_2)} \quad (66)$$

usw.

Da wir uns auf die Nähe des Haftbereiches beschränkt haben, die Größen $(x_{2\nu}-d_1)$ und $(x_{2\nu+1}-d_2)$ $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$ also »klein« sind, die dritten und höheren Potenzen derselben demnach vernachlässigt werden können, kann das Gleichungssystem (66) in der Form geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} x_1 & \\ x_2 &= -x_1+(2d_2+4pd_2{}^2)+4px_1\,(x_1-2d_1) \\ x_3 &= -x_2+(2d_1-4pd_1{}^2)-4px_2\,(x_2-2d_1) \\ x_4 &= -x_3+(2d_2+4pd_2{}^2)+4px_3\,(x_3-2d_2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

usw., woraus sich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(x_3-x_5)\,\{(x_1+x_2)-(x_3+x_4)\}-(x_1-x_3)\,\{(x_3+x_4)-(x_5+x_6)\}}{(x_1-x_3)\,(x_3-x_5)\,(x_1-x_5)} \\ p &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(x_5-x_7)\,\{(x_3+x_4)-(x_5+x_6)\}-(x_3-x_5)\,\{(x_5+x_6)-(x_7+x_8)\}}{(x_3-x_5)\,(x_5-x_7)\,(x_3-x_7)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (68)$$

---

[1]) Es gelten entweder die beiden oberen Vorzeichen oder die beiden unteren zusammen.

[2]) Vergl. Routh: Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. 1 § 488 bis 509.

[3]) Archiv für Math. u. Physik, Bd. 17 S. 338 bis 344.

usw. und

$$\left.\begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x_3^2-x_5^2)\{(x_1+x_2)-(x_3+x_4)\}-(x_1^2-x_3^2)\{(x_3+x_4)-(x_5+x_6)\}}{(x_3-x_5)\{(x_1+x_2)-(x_3+x_4)\}-(x_1-x_3)\{(x_3+x_4)-(x_5+x_6)\}} \\ d_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x_3^2-x_7^2)\{(x_3+x_4)-(x_5+x_6)\}-(x_3^2-x_5^2)\{(x_5+x_6)-(x_7+x_8)\}}{(x_5-x_7)\{(x_3+x_4)-(x_5+x_6)\}-(x_3-x_5)\{(x_5+x_6)-(x_7+x_8)\}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (69)$$

usw. Ferner

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4}\,\frac{(x_2-x_4)\{(x_4+x_5)-(x_6+x_7)\}-(x_4-x_6)\{(x_2+x_3)-(x_4+x_5)\}}{(x_2-x_4)(x_4-x_6)(x_2-x_6)} \\ p &= \frac{1}{4}\,\frac{(x_4-x_6)\{(x_6+x_7)-(x_8+x_9)\}-(x_6-x_8)\{(x_4+x_5)-(x_6+x_7)\}}{(x_4-x_6)(x_6-x_8)(x_4-x_8)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (70)$$

usw. und

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{(x_2^2-x_4^2)\{(x_4+x_5)-(x_6+x_7)\}-(x_4^2-x_6^2)\{(x_2+x_3)-(x_4+x_5)\}}{(x_2-x_4)\{(x_4+x_5)-(x_6+x_7)\}-(x_4-x_6)\{(x_2+x_3)-(x_4+x_5)\}} \\ d_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{(x_4^2-x_6^2)\{(x_6+x_7)-(x_8+x_9)\}-(x_6^2-x_8^2)\{(x_4+x_5)-(x_6+x_7)\}}{(x_4-x_6)\{(x_6+x_7)-(x_8+x_9)\}-(x_6-x_8)\{(x_4+x_5)-(x_6+x_7)\}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (71)$$

usw. Im Falle des symmetrischen Kraftfeldes gehen die Gl. (67) mit $\beta = 0$ und damit $d_2 = |d_1| = d$ über in

$$\left.\begin{aligned} x_1 & \\ x_2 &= -x_1 + (2d + 4pd^2) + 4px_1(x_1 - 2d) \\ x_3 &= -x_2 + (2d + 4pd^2) + 4px_2(x_2 + 2d) \\ x_4 &= -x_3 + (2d + 4pd^2) + 4px_3(x_3 - 2d) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

usw., woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4}\,\frac{(x_2+x_3)\{x_1+2x_2+x_3)\}-(x_1+x_2)\{x_2+2x_3+x_4\}}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1-x_3)} \\ p &= \frac{1}{4}\,\frac{-(x_3+x_4)\{x_2+2x_3+x_4\}+(x_2+x_3)\{x_3+2x_4+x_5)\}}{(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_2-x_4)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

usw. und

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}\,\frac{(x_2^2-x_3^2)\{x_1+2x_2+x_3\}+(x_1^2-x_2^2)\{x_2+2x_3+x_4\}}{-(x_2-x_3)\{x_1+2x_2+x_3\}+(x_1+x_2)\{x_2+2x_3+x_4\}} \\ d &= \frac{1}{2}\,\frac{(x_3^2-x_4^2)\{x_2+2x_3+x_4\}+(x_2^2-x_3^2)\{x_3+2x_4+x_5\}}{(x_3+x_4)\}x_2+2x_3+x_4\}-(x_2+x_3)\{x_3+2x_4+x_5\}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

usw. Den Inhalt dieser obigen Beziehungen können wir folgendermaßen ausdrücken:

Bei einer freien, unsymmetrischen bzw. symmetrischen, pseudoharmonischen Schwingung, die durch eine quadratische Dämpfung und einen Coulombschen Widerstand gehemmt wird, gehorchen die maximalen Ausschläge — in der Nähe des Haftbereiches — Gesetzmäßigkeiten, die in den Gleichungen (68) bis (71) bzw. (73) und (74) ausgedrückt sind.

Die Konstanz dieser aus den maximalen Ausschlägen gebildeten Quotienten ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer quadratischen Dämpfung und einer konstanten Reibung.

Indem wir die für die linear gedämpften und für die quadratisch gedämpften, unsymmetrischen bzw. symmetrischen, pseudoharmonischen, freien Reibungsschwingungen gewonnenen Ergebnisse beachten, ergibt sich folgendes:

Lassen wir nur lineare oder quadratische Dämpfung zu, was durch die Erfahrung im allgemeinen als berechtigt erscheint, so sind die Bedingungen, welche sich für das Vorhandensein eines Coulombschen Widerstandes und einer linearen bzw. quadratischen Dämpfung zunächst als notwendig ergeben haben, auch hinreichend, denn die Konstanz der Differenzenquotienten für die lineare Dämpfung [(50) bzw. (57)] zieht nicht die Konstanz der für die quadratische Dämpfung charakteristischen Quotienten [(68) bis (71) bzw. (73) und (74)] nach sich und umgekehrt.

Die Konstante der Quotientenserien (68), (70) bzw. (73) liefert sogleich den Dämpfungsfaktor p, und zwar im unsymmetrischen Fall auf zwei verschiedene Weisen, wodurch eine Kontrolle ermöglicht wird, und die Konstanten der anderen Quotientenserien (69), (71) bzw. (74) liefern die Ordinaten d_2 und d_1 bzw. d des Haftbereiches, welche aus

$$R = \alpha^3\sqrt{\frac{1}{2\beta}(d_1+d_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

bzw.

$$R^3 + \frac{\alpha^6}{\gamma}R - \frac{\alpha^8}{\gamma}d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

die konstante Reibung R zu berechnen gestatten.

Die Schwingungen sind nicht isochron; ihre Dauer hängt vom Anfangszustand ab. Die Schwingungszeit der n-ten Halbschwingung ist durch

$$T_n = \frac{\pi}{\alpha_\varrho} \cdot \{1 + (-1)^n p\,(x_{n-1} - d_\varrho)\}^{-1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

$(n = 2, 3, 4, \ldots, \quad \varrho = 1$ für n ungerade, $\quad \varrho = 2$ für n gerade)

im unsymmetrischen Fall bzw. durch

$$T_n = \frac{\pi}{\alpha_3} \{1 + (-1)^n p\,(x_{n-1} + (-1)^{n+1} d)\}^{-1/2} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77')$$

$(n = 2, 3, 4, \ldots)$

im symmetrischen Fall gegeben [1]).

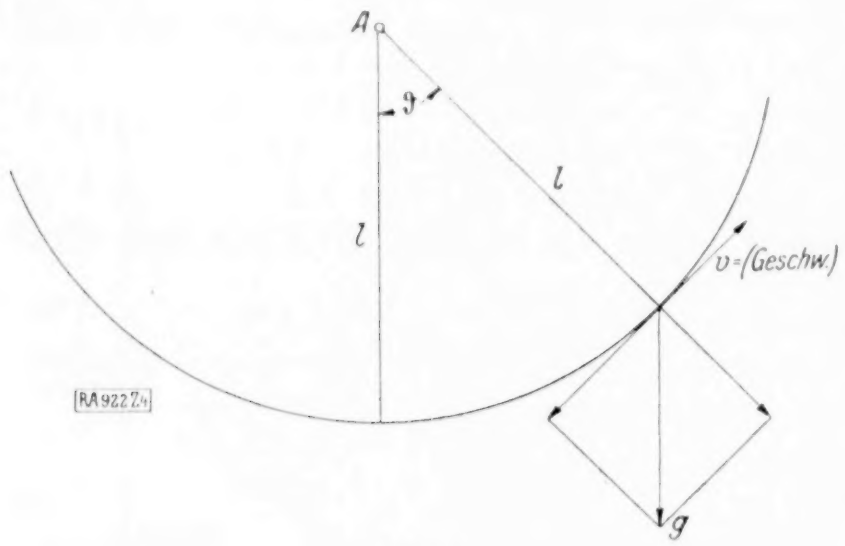


Abb. 4.

Die Gleichungen (77) bzw. (77') lehren, daß die Schwingungszeit sich mit abnehmender Amplitude vergrößert, aber stets kleiner als π/α_2 bzw. π/α_3 bleibt.

Auch hier kann man sich wieder leicht überzeugen, daß die Betrachtungen dieses Abschnittes im wesentlichen gültig bleiben, wenn einer der beiden Parameter oder beide negativ sind.

Als ein einfaches Beispiel einer freien, quadratisch gedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingung betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes auf einem lotrechten Kreise (einfaches Pendel) unter Berücksichtigung der Reibung [2]).

Die Masse des Punktes sei 1. Mit den aus Abb. 4 ersichtlichen Bezeichnungen ist der Normaldruck gegeben durch:

$$N = g \cos \vartheta + l \dot{\vartheta}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78).$$

Bedeutet f den Reibungskoeffizienten [3]), so lautet die strenge Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta \pm \frac{f g}{l} \cos \vartheta \pm f \dot{\vartheta}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79),$$

oder indem wir sin und cos durch ihre Reihen ersetzen und die höheren als 3. Potenzen vernachlässigen:

$$\ddot{\vartheta} \pm f \dot{\vartheta}^2 + \frac{g}{l} \vartheta \mp \frac{f g}{2 l} \vartheta^2 - \frac{g}{6 l} \vartheta^3 \pm \frac{f g}{l} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79').$$

Diese Gleichung ist vom Typus (65); die durch sie charakterisierte Schwingung ist aber trotz des quadratischen Gliedes des Ausschlages ϑ symmetrisch, weil bei Bewegungsumkehr auch der Koeffizient ϑ^2 sein Vorzeichen ändert. Die Reibung ist hier nicht konstant, weil es der Normaldruck nicht ist; sie wirkt erstens in dem konstanten Gliede $\pm \frac{f g}{l}$ und zweitens in dem Gliede $\pm f \dot{\vartheta}^2$ der quadratischen Dämpfung.

Der Koeffizient von ϑ^2 ist nicht analytisch; für den Hingang gilt das obere, für den Rückgang das untere Vorzeichen. Da aber in den allgemein abgeleiteten Formeln das Vorzeichen von β keine wesentliche Rolle spielt, sind sie auch auf diesen Fall anwendbar.

Die Ordinate des Haftbereiches [vergl. Gl. (18)] ergibt sich zu:

$$\delta = f \{1 - 1/3\, f^2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

und das Quadrat der Schwingungsfrequenz zu

$$\alpha_3^2 = g/l \{1 + f \delta - 1/2\, \delta^2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81),$$

endlich ist der maximale Ausschlag der n-ten Halbschwingung durch den vorhergehenden $(n-1)$-ten bestimmt nach der Rekursionsformel:

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} - \frac{2\,[\vartheta_{n-1} + (-1)^{n-1} \delta]}{1 + (-1)^n f\,[\vartheta_{n-1} + (-1)^{n-1} \delta]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82).$$

---

[1]) Wegen der Bedeutung von α_1, α_2, α_3 siehe Gl. (9), (13'), (19').

[2]) Vergl. Th. Pöschl, Handbuch der Physik, Bd. 5, S. 492.

[3]) Wir nehmen den Haft- und Gleitreibungskoeffizienten als gleich an.

Wirkt außerdem auf dem Massenpunkt eine konstante Tangentialkraft derart, daß das statische Gleichgewicht in einer Entfernung η aus der Lotrechten stattfindet, so lautet die strenge Bewegungsgleichung unter den sonst gleichen Umständen:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\sin\vartheta \pm \frac{fg}{l}\cos\vartheta \pm f\dot{\vartheta}^2 = \frac{g}{l}\sin\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

oder mit $\varphi = \vartheta - \eta$ und denselben Vernachlässigungen wie oben:

$$\ddot{\varphi} \pm f\dot{\varphi}^2 + \varphi\left[\frac{g}{l}\cos\eta \mp \frac{fg}{l}\sin\eta\right] - \varphi^2\left[\frac{g}{2l}\sin\eta \pm \frac{fg}{2l}\cos\eta\right]$$
$$- \varphi^3\left[\frac{g}{6l}\cos\eta \mp \frac{fg}{l}\sin\eta\right] + \frac{fg}{l}\cos\eta = 0 \quad . \quad . \quad (83').$$

Damit eine Schwingung möglich ist, muß die Bedingung

$$1 > f\,\mathrm{tg}\,\eta$$

erfüllt sein, weil nur dann der Koeffizient von η stets positiv bleibt.

Die Ordinaten des Haftbereiches (Gl. 4') ergeben sich zu

$$\delta_1 = \frac{-f}{1\cdot f\,\mathrm{tg}\,\eta}\left\{1 - \frac{{}^1/_3 f^2 + {}^1/_2 f\,\mathrm{tg}\,\eta}{(1-f\,\mathrm{tg}\,\eta)^2}\right\}; \quad \delta_2 = \frac{+f}{1+f\,\mathrm{tg}\,\eta}\left\{1 - \frac{{}^1/_3 f^2 - {}^1/_2 f\,\mathrm{tg}\,\eta}{(1+f\,\mathrm{tg}\,\eta)^2}\right\} \quad . \quad (84)$$

und die Quadrate der Schwingungsfrequenzen zu (Gl. (9) und (13')):

$$\alpha_1^2 = \frac{g}{l}\cos\eta - \mathfrak{F}_1(f,\eta) \qquad \alpha_2^2 = \frac{g}{l}\cos\eta\cdot\mathfrak{F}_2(f,\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}_1(f,\eta) &= 1 - f\,\mathrm{tg}\,\eta - (\mathrm{tg}\,\eta + f)\,\delta_1 - {}^1/_2(1 - f\,\mathrm{tg}\,\eta)\,\delta_1^2\\ \mathfrak{F}_2(f,\eta) &= 1 + f\,\mathrm{tg}\,\eta - (\mathrm{tg}\,\eta - f)\,\delta_2 - {}^1/_2(1 + f\,\mathrm{tg}\,\eta)\,\delta_2^2\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (85')$$

und endlich die Rekursionsformel für den maximalen Ausschlag der n-ten Halbschwingung:

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} - \frac{2\,[\vartheta_{n-1} - \delta_\varrho]}{1 + (-1)^n f\,[\vartheta_{n-1} - \delta_\varrho]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

($n = 2, 3, 4 \ldots$, $\varrho = 1$ für n ungerade, $\varrho = 2$ für n gerade.)

6. Experimentelle Bestätigung der bei den freien, linear gedämpften, pseudoharmonischen Reibungsschwingungen gefundenen Amplitudengesetze.

Die Gesetzmäßigkeiten, denen Ausschläge der symmetrischen und unsymmetrischen, pseudoharmonischen, freien, linear gedämpften Reibungsschwingungen genügen, wurden durch Beobachtung einer symmetrischen und unsymmetrischen Pendelschwingung bestätigt. Die Versuche, die lediglich die Brauchbarkeit einiger in der vorliegenden Arbeit entwickelten Formeln für die experimentelle Ermittlung des Dämpfung-faktors und der konstanten Reibung nachweisen sollten, wurden mit einfachen Mitteln ohne feinere Beobachtungs- und Meßmethoden durchgeführt. Es würde sich wohl verlohnen, Präzisionsmessungen mit den Mitteln der physikalischen Experimentiertechnik anzustellen, insbesondere auch durch Zeitmessungen und Registrierung des Schwingungsablaufes im einzelnen (etwa auf photopraphischem Wege) die Berechnung der Schwingungsparameter zu verschärfen.

Die experimentelle Aufgabe bestand darin, die Umkehrpunkte einigermaßen genau zu bestimmen. Indem an der Pendelstange ein Uebergewicht angebracht wurde, wurde die Schwingungsdauer und damit die Genauigkeit der Ablesung der Umkehrpunkte vergrößert. Dabei war zu beachten, daß die Schwingung, die durch eine lineare Dämpfung und eine konstante Reibung gehemmt wurde, nicht zu schnell zur Ruhe kam, denn es ist eine gewisse Anzahl von Umkehrpunkten erforderlich, um die Konstanz der Differenzenquotienten (Gl. (50) und (57)) feststellen zu können. Die Genauigkeit der Ablesung der Umkehrpunkte konnte also nicht beliebig gesteigert werden. Daß sie ausreichte, die gefundenen Gesetz zu bestätigen, zeigen die folgenden Versuche.

a) Symmetrische Pendelschwingung. Die Untersuchung der symmetrischen Pendelschwingung wurde an einem Pendel ausgeführt, das aus dem von Fr. Döhle und G. v. Hanffstengel angegebenen Universal-Mechanik-Modell »Pantechn« [1]) konstruiert worden war. Als Pendelkörper diente ein Metallstab, an dessem unterem und oberem Ende zur Ausgleichung der Schwingung Gewichte angebracht waren. Das Pendel ruhte

[1]) Herausgegeben von der Technisch-Wissenschaftlichen Lehrmittelzentrale, Berlin NW 87, Sickinger Str. 24.

auf einem Rollager. Durch Anbringung einer verhältnismäßig großen Pappscheibe an der Pendelstange quer zur Schwingungsebene erzielten wir die lineare Dämpfung. Die konstante Reibung wurde dadurch erzeugt, daß die Pendelstange an einem straff gespannten Faden[1]) entlang gleiten konnte. Durch hinreichend straffe Spannung des Fadens wird erreicht, daß die Pendelstange überall nahezu mit demselben Druck auf dem Faden lastet, daß die Reibung überall nahezu konstant wird.

Für die Umkehrpunkte ergaben sich die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte. In der Kolonne A stehen die Umkehrpunkte selbst, in der Kolonne B ihre Differenzen- und in der Kolonne C ihre einfachen Quotienten[2]). Ausführlich:

A	B	C
1. x_1	1. $\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_2}$	1. $x_1 : x_2$
2. x_2	2. $\frac{x_3 - x_4}{x_2 - x_3}$	2. $x_2 : x_3$
3. x_3	3. $\frac{x_4 - x_5}{x_3 - x_4}$	3. $x_3 : x_4$
4. x_4		4. $x_4 : x_5$
5. x_5		

	I			II			III			IV			V			VI			VII		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1.	4,00	0,91	1,29	4,00	0,97	1,29	3,96	0,93	1,28	4,00	0,94	1,29	4,06	0,92	1,31	4,07	0,92	1,29	4,00	0,94	1,30
2.	3,10	0,91	1,40	3,10	0,96	1,39	3,10	0,90	1,40	3,10	0,94	1,37	3,10	0,90	1,39	3,15	0,94	1,37	3,05	0,92	1,42
3.	2,21	0,94	1,58	2,22	0,98	1,61	2,20	0,93	1,58	2,25	0,93	1,55	2,22	0,94	1,58	2,30	0,93	1,53	2,15	0,92	1,62
4.	1,40		2,19	1,37		2,5	1,39		1,78	1,45		2,07	1,40		2,22	1,50		1,97	1,32		2,4
5.	0,64			0,53			0,78			0,70			0,63								

	VIII			IX			X			XI			XII			XIII			XIV		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1.	3,95	0,94	1,29	4,00	0,90	1,33	4,00	0,90	1,33	4,13	0,92	1,33	4,00	0,90	1,33	4,08	0,92	1,33	4,00	0,95	1,33
2.	3,05	0,94	1,38	3,00	0,91	1,42	3,00	0,88	1,42	3,10	0,89	1,44	3,00	0,94	1,42	3,05	0,89	1,45	3,00	0,89	1,46
3.	2,20	0,92	1,57	2,10	0,94	1,64	2,10	0,94	1,61	2,15	0,94	1,65	2,10	0,92	1,68	2,10	0,94	1,68	2,05	0,88	1,70
4.	1,40		2,12	1,28		2,51	1,30		2,38	1,30		2,6	1,25		2,66	1,25		3,12	1,20		2,66
5.	0,66			0,51			0,55			0,50			0,47			0,40			0,45		

Damit

$$S = 0{,}926_5 \pm 0{,}012 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87).$$

Die Differenzenquotienten (Kolonne B) sind also nahezu konstant, die einfachen nicht, hier ist deutlich ein Gang bemerkbar, wie es nach Abschnitt 4 auch sein muß.

Nach der in Abschnitt 4 angegebenen Vorschrift berechnen wir den linearen Dämpfungsfaktor λ und die konstante Reibung R. Für die Systemkonstanten ergibt sich

$$\alpha^2 = 14{,}79\ (\mathrm{sek}^{-2}), \quad \gamma = 0{,}00057\ (\mathrm{cm^2\,sek}^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88).$$

Aus S und den Ordinaten der Umkehrpunkte bestimmen wir d aus (59) zu

$$d = 0{,}341_9\ (\mathrm{cm}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89).$$

Damit und mit (87) und (88) finden wir aus (58) und (60)

$$\lambda = 0{,}055_7\ (\mathrm{sek}^{-1}), \quad R = 5{,}61_4\ (\mathrm{cm, sek}^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90).$$

Zur Kontrolle wurde eine zweite Meßreihe aufgenommen, bei welcher die konstante Reibung durch Entfernung des straff gespannten Fadens ausgeschaltet war. Der Rollwiderstand wurde als unmerklich gering vernachlässigt. Für den Dämpfungsfaktor λ ergab sich derselbe Wert wie vorher, wie es auch sein muß.

Für die Umkehrpunkte fanden wir die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte. In der Kolonne A stehen sie selbst, in der Kolonne B ihre einfachen, in der Kolonne C ihre Differenzenquotienten.

---

[1]) Der Faden war geradlinig gespannt.

[2]) Es werden nur einige der aufgestellten Versuchsreihen angegeben.

	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1.	1,10	1,047	1,00	1,20	1,052	0,83	1,23	1,051	0,83	1,25	1,056	1,00
2.	1,05	1,05	0,80	1,14	1,046	0,80	1,17	1,044	0,80	1,19	1,053	0,83
3.	1,00	1,041	0,75	1,09	1,038	1,00	1,12	1,055	1,00	1,13	1,046	1,00
4.	0,96	1,032	1,33	1,05	1,039	1,00	1,08	1,038	1,25	1,08	1,048	1,00
5.	0,93	1,044	1,00	1,01	1,041	1,00	1,04	1,050	0,80	1,03	1,051	0,80
6.	0,89	1,047	0,75	0,97	1,043	1,00	0,99	1,042	1,00	0,98	1,043	1,00
7.	0,85	1,038	1,00	0,93	1,045	1,00	0,95	1,044	1,00	0,94	1,044	0,75
8.	0,82	1,038		0,89	1,047		0,91	1,046		0,90	1,034	
9.	0,79			0,85			0,87			0,87		

Damit

$$S' = 1{,}039 \pm 0{,}0076_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91).$$

Es sind also die einfachen und damit auch die Differenzenquotienten nahezu konstant, wie es sein muß.

Der lineare Dämpfungsfaktor λ ergibt sich zu

$$\lambda = 0{,}057_1 \ (\mathrm{sek}^{-1}),$$

also nahezu in Uebereinstimmung mit Gl. (90).

Es ist bemerkenswert, daß man mit diesem einfachen mehr für Demonstrationszwecke bestimmten Apparat »Pantechno« auch quantitativ gut befriedigende Resultate erzielen konnte.

b) Unsymmetrische Pendelschwingung. Die unsymmetrischen Pendelschwingungen wurden an einem Pendel aus dem Physikalischen Institut Jena beobachtet, welches für Vorlesungszwecke bestimmt ist und von Herrn Prof. Dr. M. Wien freundlichst zur Verfügung gestellt wurde.

Wir beschreiben die Versuchsanordnung: Die Pendelstange ruht auf einer Schneide, die zur Schwingungsebene nicht genau senkrecht steht. Hierher rührt die Unsymmetrie der Schwingungen. Zwischen dem unteren Ende und der Drehachse ist ein verschiebbares Gewicht angebracht, durch welches die Schwingungsdauer reguliert wird. Die lineare Dämpfung wird durch eine Scheibe hervorgerufen, welche sich am unteren Ende der Pendelstange befindet und in Luft bzw. Wasser oder einer anderen Flüssigkeit eintaucht. Weiter ist am unteren Ende der Pendelstange ein Bleistift befestigt, der die Umkehrpunkte auf einem Stück Papier, das längs einer Unterlage parallel zur Schwingungsebene verschoben werden kann, aufzeichnet. Dadurch wird konstante Reibung erzeugt, vorausgesetzt, daß der Bleistift überall nahezu den gleichen Druck gegen die Unterlage ausübt, was mit einiger Genauigkeit erreicht werden kann. Außerdem wird noch konstante Reibung, wie im Falle der symmetrischen Pendelschwingung, dadurch hervorgebracht, daß die Pendelstange an einem straff gespannten Faden gleitet.

Für die Umkehrpunkte ergeben sich die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte. Das Schema der Tabelle ist dieses:

A	B	C
1. x_1	1. $\frac{x_3 - x_5}{x_1 - x_3}$	1. $x_1 : x_2$
2. x_2	2. $\frac{x_5 - x_7}{x_3 - x_5}$	2. $x_3 : x_4$
3. x_3	3. $\frac{x_7 - x_9}{x_5 - x_7}$	3. $x_5 : x_6$
4. x_4	.....	4. $x_7 : x_8$
5. x_5	4. $\frac{x_4 - x_6}{x_2 - x_4}$	.....
6. x_6	5. $\frac{x_6 - x_8}{x_4 - x_6}$	5. $x_2 : x_3$
7. x_7		6. $x_4 : x_5$
8. x_8		7. $x_6 : x_7$
9. x_9		8. $x_8 : x_9$

Luftdämpfung.

	I			II			III			IV			V			VI		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1.	6,25	1,051	1,146	6,45	0,958	1,114	6,08	0,971	1,087	7,35	1,051	1,177	5,65	0,928	1,130	5,95	0,972	1,081
2.	5,45	0,866	1,253	5,79	1,087	1,153	5,60	1,088	1,101	6,24	0,965	1,250	5,00	1,000	1,164	5,50	0,944	1,092
3.	4,90	1,056	1,313	5,25		1,281	4,68	0,952	1,167	6,00	0,977	1,308	4,25		1,260	4,48	0,962	1,150
4.	3,98	0,904	1,630	4,55	1,088	1,500	4,25	1,037	1,187	4,80	0,895	1,477	3,65	0,970		4,10	1,035	1,269
5.	3,48	0,954	1,112	4,10	0,961	1,102	3,32	0,928	1,197	4,58		1,040	2,95		1,176	3,05	0,931	1,227
6.	2,65		1,143	3,20		1,109	2,85		1,280	3,50		1,047	2,34		1,237	2,65		1,344
7.	2,25		1,177	2,85		1,119	1,84		1,548	3,25		1,076	1,65		1,418	1,65		1,606
8.	1,38		1,452	1,90			1,55		3,604	2,20		1,128				1,30		3,714
9.	0,95						0,43			1,95						0,35		

Damit $$U_1 U_2 = 0{,}98_1 \pm 0{,}059_7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92).$$

Die Differenzenquotienten der positiven und negativen maximalen Ausschläge sind also je für sich konstant, und zwar gleich derselben Konstanten $U_1 U_2$, während die einfachen Quotienten der positiven und negativen maximalen Ausschläge je für sich nicht konstant sind.

Wasserdämpfung.

	I			II			III			IV			V			VI		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1.	7,80	0,777	1,106	8,50	0,760	1,240	5,90	0,878	1,204	8,30	0,833	1,271	8.30	0,936	1,185	7,28	0,894	1,170
2.	7,05	0,828	1,132	6,85	0,885	1,319	4,90	0,793	1,287	6,53	0,825	1,282	7,00	0,772	1,239	6,22	0,825	1,200
3.	5,50		1,144	6,20		1,348	4,25		1,473	5,90		1,278	5,95		1,250	5,10		1,188
4.	4,90	0,720		4,70	0,651		3,30	0,876		4,60	0,803		4,80	0,818		4,25	0,812	
5.	3,80		1,270	4,45		1,104	2,80		1,105	3,90		1,106	3,75		1,176	3,15		1,219
6.	3,35		1,289	3,30		1,106	1,90		1,178	3,05		1,176	3,00		1,280	2,65		1,349
7.	2,35		1,425	2,90		1,139	1,65		1,152	2,25		1,355	2,05		1,463	1,54		1,720

Damit $$U_1 U_2 = 0{,}81_6 \pm 0{,}064_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93).$$

Wir finden auch hier die Konstanz der Differenzenquotienten und die Veränderlichkeit der einfachen Quotienten bestätigt.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Winkelmann für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und die freundliche Unterstützung bei der Anfertigung derselben herzlichen Dank zu sagen. 922

Die Maximalmomentenfläche eines Gerberschen Balkens.[1]

Von **DOROTHEA STARKE** in Jena.

Die Frage nach den Maximalmomenten an den Querschnitten eines einfachen, zweifach gestützten Balkens unter Verkehrslast wurde schon von Culmann behandelt[2]). Eine besonders übersichtliche Gestalt erhielt die Lösung durch R. v. Mises[3]) und später nochmals — anscheinend unabhängig — auf einem anderen (geometrischen) Wege durch W. Vogt[4]).

Für einen Gerberschen Balken scheint jedoch bis jetzt eine exakte mathematische Lösung dieser Aufgabe nicht bekannt zu sein. Müller-Breslau schreibt in bezug auf den Gerberschen Balken in seiner »Graphischen Statik der Baukonstruktionen«: »Die gefährlichsten Zuganordnungen und Zugstellungen werden . . . durch Probieren bestimmt.«[5])

[1]) Jenaer Doktordissertation, Referent: Prof. Dr. Winkelmann.
[2]) Friedrich Schur, Vorlesungen über graphische Statik, Leipzig 1915, Abschn. 16, S. 68.
[3]) R. v. Mises, Dinglers Polytechnisches Journal 1906 Bd. 321, Heft 38, S. 595.
[4]) W. Vogt, Zeitschr. d. V. d. I. 1913, Bd. 57, Nr. 16, S. 620.
[5]) Müller-Breslau: Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1912, Bd. 1, Abschn. 6, S. 264.

In der folgenden Abhandlung soll nun ein sachgemäßes und begründetes Konstruktionsverfahren für die Maximalmomentenfläche eines Gerberträgers abgeleitet werden.

Zunächst wird die Aufgabe auf die Untersuchung eines Auslegerbalkens reduziert. Da an den Querschnitten eines Auslegerbalkens sowohl positive als auch negative Biegungsmomente herrschen können, so handelt es sich um die Konstruktion zweier Flächen: einer Fläche der negativen und einer Fläche der positiven Maximalmomente. Die Fläche der negativen Maximalmomente erstreckt sich über den ganzen Auslegerbalken, die Fläche der positiven Maximalmomente dagegen nur über ein Stück zwischen den Mittelstützen des Auslegerbalkens, da nur zwischen den Stützen positive Momente auftreten können. Diejenigen Stellungen eines über einen Gerberschen Balken wandernden Lastenzuges, in denen eine Last über Anfang oder Ende eines der an einen Auslegerbalken anschließenden Koppelträger steht, nennt man »kritische Stellungen«, die zugehörigen Schlußlinien »kritische Schlußlinien«. Es läßt sich nunmehr zeigen, daß negative Maximalmomente nur in den kritischen Stellungen auftreten können. Ein Vergleich der kritischen Momentenflächen untereinander liefert daher gleichzeitig die Zuordnung[1]) der Querschnitte zu den einzelnen kritischen Stellungen sowie die negative Gesamtmaximalmomentenfläche. Für die Querschnitte der Ausleger, der überkragenden Enden des Auslegerbalkens, läßt sich mit Hilfe eines Analogieschlusses aus den Verhältnissen am einfachen Balken von vornherein die Zuordnung der Querschnitte zu bestimmten kritischen Stellungen angeben.

Die Stücke der positiven Maximalmomentenfläche, die einem Wandern des Lastenzuges zwischen je zwei kritischen Stellungen entsprechen, können mit Hilfe von ideellen ruhenden Belastungen ermittelt werden. Ein Zusammensetzen dieser Teilflächen liefert die Fläche der positiven Maximalmomente des Auslegerbalkens.

Zu der positiven, sowie zu der negativen Gesamtmaximalmomentenfläche läßt sich stets die zugeordnete Scherkraftlinie und somit eine zugeordnete ideelle ruhende Belastung angeben, die man der wirklichen ruhenden Belastung des Balkens hinzufügen kann, so daß die maximalen Momente des Balkens unter einer ruhenden Belastung und einer gleichzeitigen Verkehrslast durch Konstruktion einer einheitlichen Fläche erfaßt werden können.

Im letzten Teil der Arbeit wird die Zuordnung der Querschnitte sowie die Konstruktion der Maximalmomentenflächen für den Gerberschen Auslegerbalken unter einem gleichmäßigen stetigen Lastenzuge behandelt.

1. Reduktion der Aufgabe auf die Untersuchung eines Auslegerbalkens.

Ein Gerberscher Balken ist aus einem durchgehenden, auf mehr als zwei Stützen ruhenden Träger dadurch entstanden, daß man diesen durch Einschalten von Gelenken wieder in einen statisch bestimmten Balkenkomplex verwandelt. Es läßt sich zeigen, daß man zu diesem Zweck ebensoviel Gelenke anbringen muß, wie Mittelstützen vorhanden sind. Dabei dürfen aber nicht mehr als zwei Stützen oder zwei Gelenke direkt aufeinander folgen und Abschnitte zwischen zwei Stützen, die Gelenke enthalten, müssen mit Abschnitten ohne Gelenke abwechseln, damit das Balkengefüge nicht labil wird. Die einzig möglichen Arten von Teilbalken eines solchen Gerberträgers sind somit die Koppelträger (Abb. 1a und 1b) und die Auslegerbalken (Abb. 2a und 2b). Abb. 3 erschöpft alle möglichen Arten der Anordnung dieser Teilbalken.

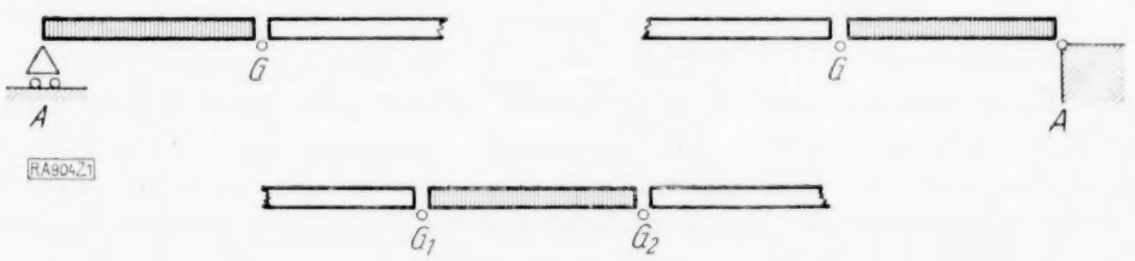


Abb. 1a und 1b.

Aus der Gestalt der Einflußlinie für das Biegungsmoment eines Koppelträgers (Abb. 4) erkennt man, daß der Koppelträger auch in bezug auf das Auftreten von Maxi-

[1]) Der Ausdruck »Zugeordnet« sei in dem Sinne von W. Vogt so gebraucht, daß die Stellung des Zuges, die an einem Querschnitt Q ein maximales Biegungsmoment hervorruft, als diesem Querschnitt und diesem Biegungsmoment zugeordnet bezeichnet wird.

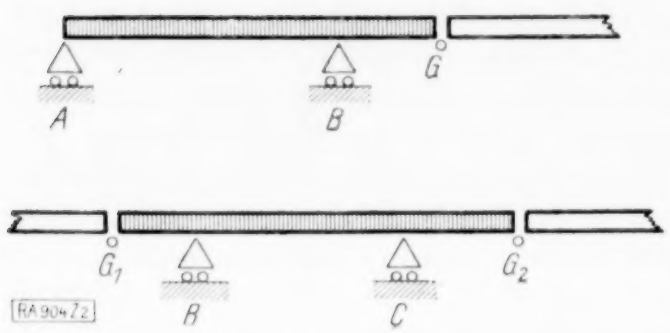


Abb. 2a und 2b.

malmomenten genau so zu behandeln ist, wie ein einfacher, zweifach gestützter Balken [1]). (Die Gelenkdrucke entsprechen den Auflagerreaktionen.) Es gilt also auch für diesen Teilbalken wie für den einfachen Balken der Satz von Asimont: »Teilt man den Balken im Verhältnis der Lasten eines über ihn beweglichen Lastenzuges, so trifft für einen Punkt jedes Teiles das Maximum des Biegungsmomentes ein, wenn die dem Teil entsprechende Last sich über dem Punkte befindet, für den Teilpunkt selbst, wenn die Strecke zwischen den beiden Lasten ihn enthält [2]).« Abb. 5 (die Einflußlinie für das Biegungsmoment eines Auslegerquerschnittes) und Abb. 6 (die Einflußlinie für das Biegungsmoment eines Querschnittes zwischen den Mittelstützen B und C) zeigen, daß die Momente der Querschnitte eines Auslegerbalkens außer von den auf den Auslegerbalken selbst wirkenden nur noch von den über den anschließenden Koppelträgern stehenden Kräften abhängig sind. Die Untersuchungen können sich also auf die Ermittlungen der Maximalmomentenfläche eines von zwei Koppelträgern eingeschlossenen Auslegerbalkens beschränken.

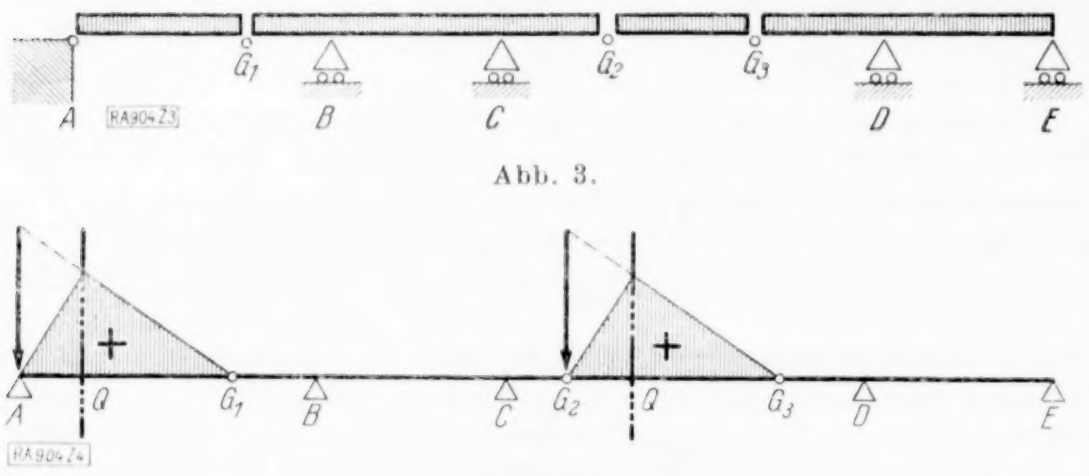


Abb. 3.

Abb. 4.

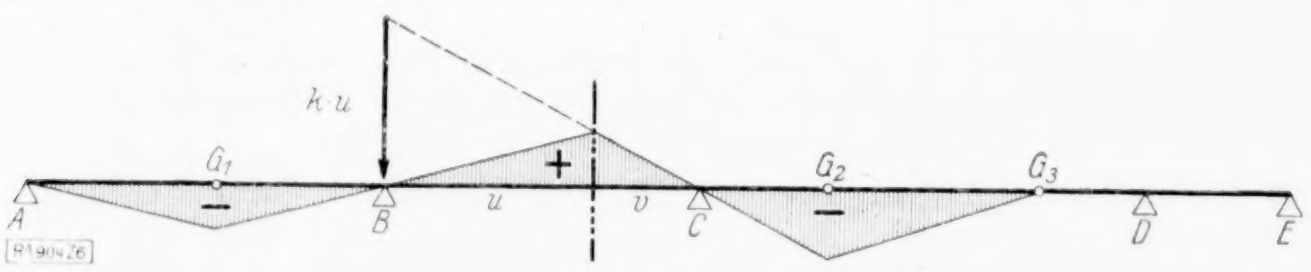


Abb. 6.

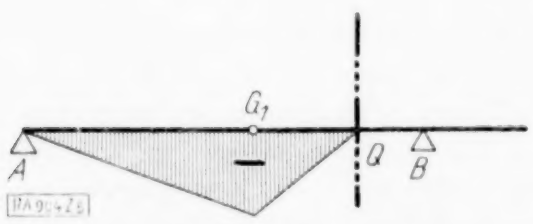


Abb. 5.

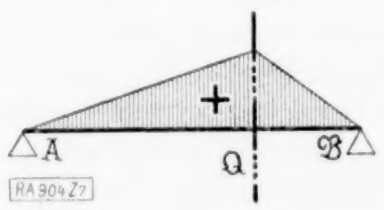


Abb. 7.

I. Teil: Der Gerbersche Balken unter einem aus Einzellasten bestehenden Lastenzuge.

2. Die Zuordnung der Querschnitte eines Auslegers zu den Stellungen eines beliebigen Lastenzuges. Ein Vergleich zwischen der Gestalt der Einflußlinie für das Biegungsmoment an dem Querschnitt eines einfachen, zweifach gestützten Balkens (Abb. 7) mit der Einflußlinie für das Biegungsmoment an einem Auslegerquerschnitt (Abb. 5) führt zu einem Analogieschluß:

Eine Einflußlinie ordnet jeder Stellung einer Last das durch sie hervorgerufene Biegungsmoment als Ordinate zu. Die Höhe der Einflußlinie ist proportional der Größe der Last. Das maximale Biegungsmoment unter einem Lastenzuge von n Lasten tritt an einem Querschnitt für die Stellung des Lastenzuges ein, für die die Summe der Einfluß-

[1]) Ueber die Konstruktion einer solchen Maximalmomentenfläche vergl. die unter Anm. 2 oder die unter Anm. 3 (S. 130) angegebene Arbeit.

[2]) Friedrich Schur, Vorlesungen über graphische Statik, Leipzig 1925, Satz 24, S. 70.

ordinaten der einzelnen Lasten ein Maximum erreicht. Hieraus folgt, daß bei gleicher Form dieser Einflußlinien (wie in Abb. 5 und 7) der gleiche Lastenzug bei analoger Stellung das Maximalmoment hervorbringen muß. Die Analogie besteht hier in folgendem: Es entspricht der Gesamtlänge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ des einfachen Balkens die Strecke AQ, der Vertikalen durch den Querschnitt $\mathfrak{Q}$, die Vertikale durch das Gelenk G des Gerberträgers. Der für den einfachen Balken bestehende Satz von Asimont überträgt sich folgendermaßen:

Satz I: Teilt man die Strecke AQ im Verhältnis der Lasten eines über den Gerberschen Balken wandernden Lastenzuges von n Lasten ($k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$) [1]), so tritt an dem Auslegerquerschnitt Q dann das Maximalmoment auf, wenn diejenige Einzellast über dem Gelenk G steht, die dem das Gelenk G enthaltenden Abschnitt entspricht [2]).

Für diejenigen Querschnitte τ_ν ($\nu = 0, 1, 2 \ldots n$) des Auslegers, für die bei der Einteilung das Gelenk G gerade auf einen Teilstrich fällt und die Teilungsquerschnitte genannt werden sollen, tritt das Maximalmoment solange ein, wie die den beiden dem Gelenk benachbarten Abschnitten entsprechenden Kräfte das Gelenk einschließen. Es ist der erste dieser Teilungsquerschnitte τ_ν identisch mit G, der letzte liegt im Unendlichen. Für einen beliebigen Teilungsquerschnitt gilt die Gleichung:

$$AG : G\tau_\nu = (k_n + k_{n-1} + \ldots + k_{\nu+1}) : (k_\nu + k_{\nu-1} + \ldots + k_2 + k_1) = K_n K_\nu : K_\nu K_0$$

oder

$$A\tau_\nu : \tau_\nu G = \sum_1^n{}^i k_i : \sum_1^\nu{}^i k_i = K_n K_0 : K_0 K_\nu .$$

Satz I liefert zunächst nur ein Gesetz über die Entstehung des Maximalmomentes an jedem einzelnen Querschnitt Q; denn für jeden neuen Querschnitt muß die Einteilung einer anderen Strecke AQ vorgenommen werden. Jedoch bewirkt an allen denjenigen Querschnitten, für die das Gelenk G in einen der gleichvielten Kraft entsprechenden Abschnitt fällt, die gleiche Stellung des Lastenzuges das Maximalmoment. Daraus folgt:

Satz II: Teilt man für jedes ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots n$) den an den zu untersuchenden Ausleger anschließenden Koppelträger äußerlich im Verhältnis $\sum_1^n{}^i k_i : \sum_1^\nu{}^i k_i$ ($= K_n K_0 : K_0 K_\nu$), so daß durch die Teilpunkte der Ausleger eingeteilt wird, so tritt an allen Auslegerquerschnitten zwischen zwei Teilpunkten $\tau_{\nu-1}$ und τ_ν dann das maximale Biegungsmoment ein, wenn die Kraft k_ν über dem Gelenk steht, an einem Teilungsquerschnitt τ_ν selbst, solange die Kräfte $k_{\nu+1}$ und k_ν das Gelenk einschließen.

Die Festlegung der Teilpunkte τ_ν geschieht wohl am besten nach dem in Abb. 8 gezeichneten Schema. Es wurden hier von A aus die Größen der Lasten des Lastenzuges im gleichen Maßstabe nacheinander auf einer Geraden aufgetragen. Zu den Verbindungslinien GK_ν werden durch den Endpunkt K_0 des Kräftezuges Parallelen gezogen. Deren Schnitte mit dem Ausleger ergeben die Teilpunkte.

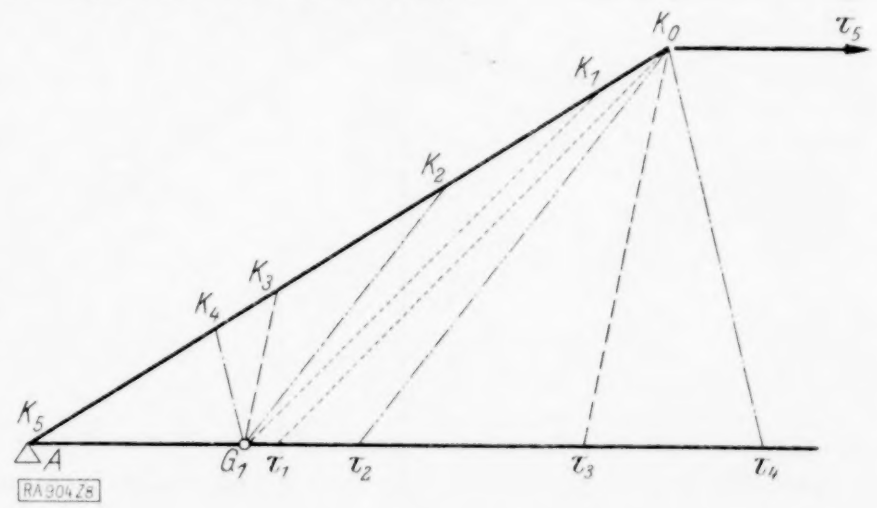


Abb. 8.

Satz III. Sieht man die von G nach den K_ν und die von K_0 nach den Punkten τ_ν gehenden Geraden als Strahlen zweier projektiver Strahlenbüschel an, so kann man sagen: Zwei benachbarte Strahlen des Büschels durch G schneiden aus dem Kräftezug diejenige Kraft aus, die — über G stehend — das Maximalmoment an den durch die parallelen Strahlen des Büschels durch K_0 aus dem Ausleger ausgeschnittenen Querschnitten hervorruft.

[1]) Die Bezeichnung werde dabei stets so gewählt, daß bei einem Wandern des Lastenzuges vom Koppelträger auf den Ausleger die Kraft k_1 zuerst das Gelenk überschreitet.

[2]) Dieser Satz gilt jedoch nur, wenn der Lastenzug kürzer als das Balkenstück AQ ist; denn der Asimontsche Satz gilt auch nur, wenn der Lastenzug kürzer als der einfache Balken $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist.

3. Die Maximalmomentenfläche eines Auslegers. Nach den bisherigen Betrachtungen läßt sich die Maximalmomentenfläche für die Querschnitte eines Auslegers zeichnen. Man zeichnet zunächst den Kräfteplan (Abb. 9a) und das Seilpolygon (Abb. 9b). Für den Lastenzug $k_1, k_2, \ldots k_n$ in gewohnter Weise (in Abb. 9 wurde ein Lastenzug

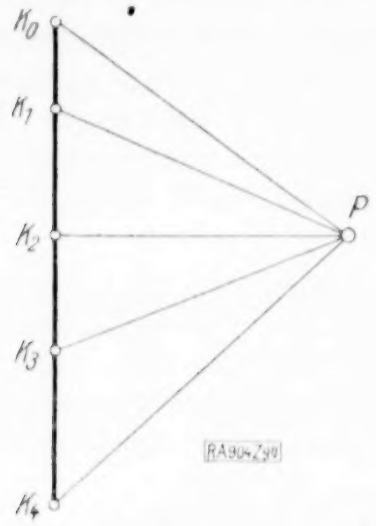


Abb. 9a.

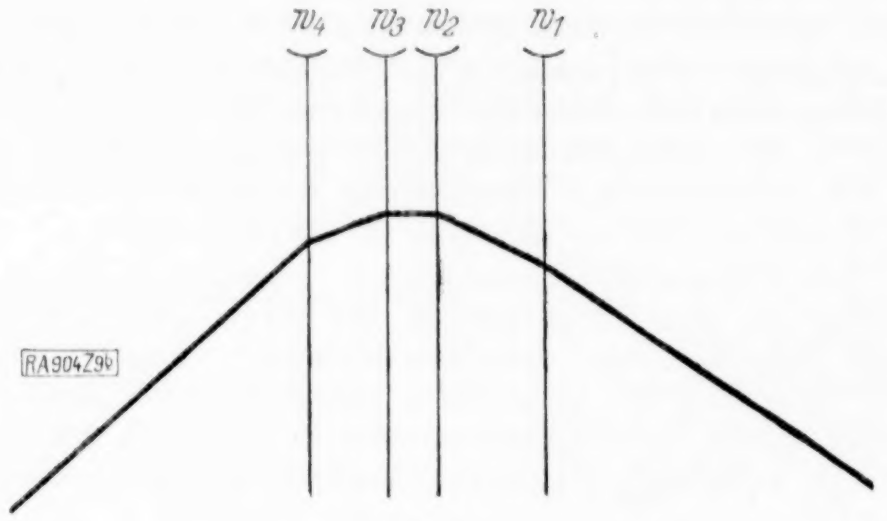


Abb. 9b.

von 4 Lasten gewählt). Dann schiebt man das Blatt mit dem Seilpolygon unter ein Blatt transparentes Papier, auf dem man (Abb. 10) den Ausleger nebst anschließendem Koppelträger aufgezeichnet und den Ausleger vom Gelenk an durch die τ_ν eingeteilt hat. Man läßt zuerst die Wirkungslinie der Kraft k_1 mit der Vertikalen durch G zusammenfallen und zeichnet das (durchzupausende) Seilpolygon und das zugehörige Stück der Schlußlinie zwischen der Vertikalen durch G und der Vertikalen durch τ_1 auf das transparente Papier auf. Dann rückt man das untere Blatt weiter, bis die Wirkungslinie von k_2 mit der Vertikalen durch G zusammenfällt und zeichnet jetzt das Stück des Seilpolygons

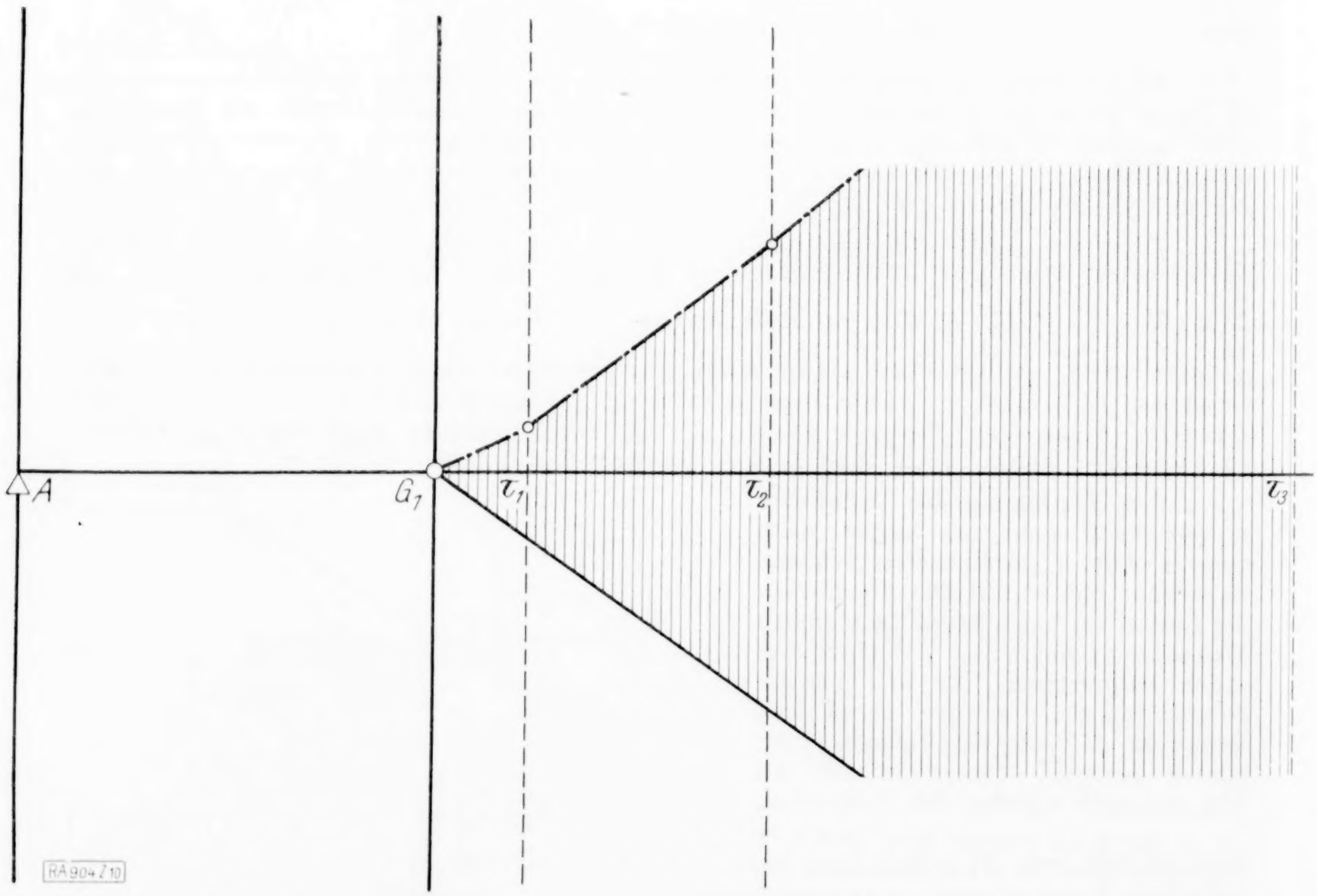


Abb. 10.

und das Stück der neuen Schlußlinie, das zwischen den Vertikalen durch τ_1 und τ_2 liegt, usf.[1]). Sorgt man dafür, daß das Seilpolygonstück eines neuen Abschnittes stets an das Seilpolygonstück des vorhergehenden Abschnittes direkt anschließt, so muß auch die neue Schlußlinie stets direkt an die alte anschließen; denn: das Stück der Vertikalen durch τ_ν, das von Schlußlinie und Seilpolygon ausgeschnitten wird, repräsentiert das Maximalmoment für τ_ν. Dieses Maximalmoment tritt an dem Querschnitt τ_ν solange auf, als die Kräfte k_ν und $k_\nu+1$ das Gelenk einschließen, im Grenzfall also auch, wenn k_ν oder $k_\nu+1$ über dem Gelenk steht[2]).

4. Die Schlußlinien über BC als Parabeltangenten. Bei den folgenden Untersuchungen werde der von Culmann eingeführte Kunstgriff angewendet, nicht den Lastenzug über den Balken, sondern den Balken unter dem Lastenzug wandern zu lassen[3]). Abb. 11 zeigt zwei verschiedene Lagen des Balkens unter dem Seilpolygon eines Lastenzuges. Solange jeder der Punkte A, G_1, G_2, D sich unter demselben Seilstrahl bewegt, d. h. keiner von einer Kraft passiert wird, durchwandern die 4 Punkte $\overline{A}$, $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$, $\overline{D}$ zueinander projektive Punktreihen. Verbindet man die entsprechenden Punkte zweier projektiver Punktreihen (z. B. die Punkte $\overline{A}$ mit den Punkten $\overline{G_1}$, die Punkte $\overline{G_2}$ mit den Punkten $\overline{D}$), so umhüllen die Verbindungslinien Kegelschnitte, und zwar in diesem Falle je eine Parabel mit vertikaler Achse (das sind die den Koppelträgern zugehörigen Culmannschen Parabeln).

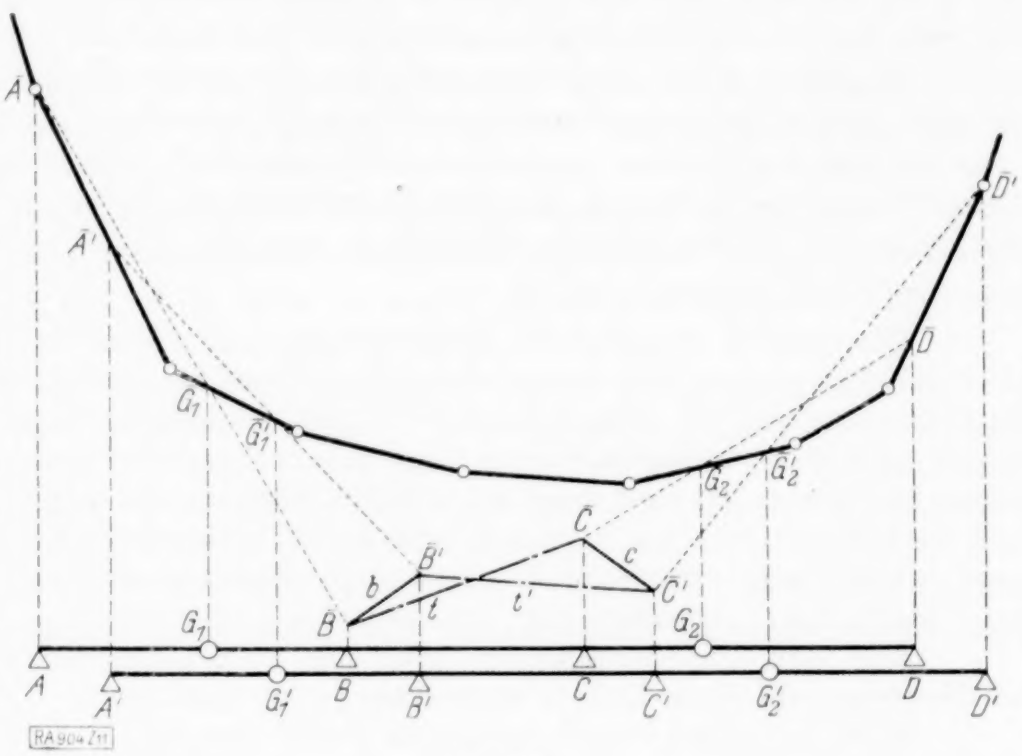


Abb. 11.

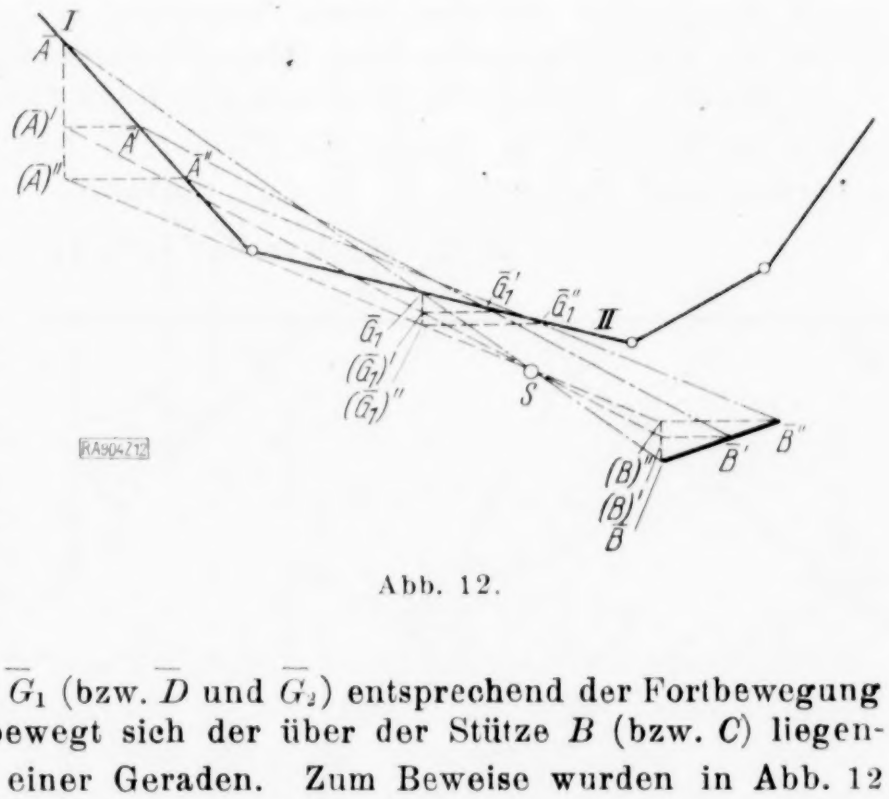


Abb. 12.

Es interessiert jedoch jetzt das Verhalten der Verlängerung dieser Schlußlinien über das Gelenk hinaus bis zur Vertikalen durch die nächste Mittelstütze, d. h. bis zu den Punkten $\overline{B}$ bzw. $\overline{C}$. Es läßt sich folgende Behauptung aufstellen:

Wandert jeder der Punkte $\overline{A}$ und $\overline{G_1}$ (bzw. $\overline{D}$ und $\overline{G_2}$) entsprechend der Fortbewegung des Balkens auf einem Seilstrahl, so bewegt sich der über der Stütze B (bzw. C) liegende Schlußlinienpunkt $\overline{B}$ (bzw. $\overline{C}$) auf einer Geraden. Zum Beweise wurden in Abb. 12 die Schlußlinien $\overline{A}\,\overline{G_1}\,\overline{B}$, $\overline{A'}\,\overline{G_1'}\,\overline{B'}$, $\overline{A''}\,\overline{G_1''}\,\overline{B''}$, dreier Lagen des Balkens horizontal (und parallel) so verschoben, daß nunmehr die entsprechenden Punkte $\overline{A}\,(\overline{A'})\,(\overline{A''})$, $\overline{G_1}\,(\overline{G_1'})\,(\overline{G_1''})$, sowie $\overline{B}(\overline{B'})(\overline{B''})$ senkrecht untereinander liegen. Dann ist $\overline{A}\,(\overline{A'}):(\overline{A'})(\overline{A''}) = \overline{G_1}\,(\overline{G_1'}):(\overline{G_1'})(\overline{G_1''})$.

[1]) Man kann auf das transparente Papier verzichten und die gesuchten Linien durch Parallelenziehen auf Abb. 10 übertragen.

[2]) Die Lage der Stütze B hat keinen Einfluß auf die Gestalt der Fläche. Jedoch schließt die Vertikale durch die Stütze B die Maximalmomentenfläche der Auslegerquerschnitte ab, und die aus ihr durch die Fläche ausgeschnittene Momentenstrecke entspricht dem maximalen Stützmoment in B.

[3]) Im Folgenden werden die charakteristischen Punkte der Schlußlinien mit denselben Buchstaben, jedoch überstrichen, bezeichnet, wie die senkrecht darunterliegenden Punkte des Balkens.

Folglich schneiden sich $A\,G_1$, $(A')\,(G_1')$ und $(A'')\,(G_1'')$ in einem Punkte S und die Vertikale durch B wird von diesen Strahlen durch S in demselben Verhältnis geteilt. Es verhalten sich also die Aenderungen der Vertikalkomponenten der Punkte $\bar{B}$ wie die Aenderungen der Vertikalkomponenten der Punkte $\bar{A}$ oder der Punkte $\bar{G}_1$, also auch wie die Horizontalverschiebungen, d. h. der Punkt $\bar{B}$ wandert senkrecht über dem Punkte B auf einer Geraden.

Satz IV. Solange bei der Wanderung des Balkens keiner der Punkte A, G_1, G_2, D die Wirkungslinie einer Kraft passiert durchlaufen die Endpunkte der Schlußlinie zueinander projektive Punktreihen.

Sobald jedoch einer dieser Punkte A, G_1, G_2, D von einer Kraft überschritten wird, so hat man von da an dieselbe Ueberlegung von Neuem anzustellen und erhält eine neue Zuordnung zweier projektiver Punktreihen. Die Lagen des Balkens, für die einer dieser Punkte gerade auf einer Kraftvertikalen liegt, seien »kritische« Stellungen genannt. Zwischen je zwei kritischen Stellungen umschreiben die Schlußlinien $\bar{B}\,\bar{C}$ eine Parabel mit vertikaler Achse.

Die beiden projektiven Punktreihen, auf denen $\bar{B}$ und $\bar{C}$ wandern, werden — da sie auch Tangenten der durch sie, d. h. durch die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte »bestimmten« Parabel sind —, »Bestimmungstangenten«, die Schlußlinien in Anfangs- und Endstellungen für das zu untersuchende Parabelstück »Endtangenten« genannt. Diese Endtangenten sind zugleich die Schlußlinien für die kritischen Stellungen des Balkens und heißen als solche (in bezug auf das Wandern des Balkens unter dem ganzen Lastenzug) auch »kritische Schlußlinien«. In Abb. 11 sind also b und c die Bestimmungstangentenstücke zwischen den Endtangenten t und t'.

Aus den Untersuchungen über die Maximalmomentenfläche des einfachen Balkens ist der folgende Satz über Parabeltangenten bekannt:

Eine beliebige Parabeltangente t teilt das Stück jeder anderen, das von zwei festen Tangenten b und c ausgeschnitten wird, in demselben Verhältnis wie die Schnittpunkte dieser Tangente t mit den festen Tangenten b und c die Strecke zwischen dem Schnittpunkt der festen Tangenten und ihren Berührungspunkten. Hieraus folgt für Abb. 13 der

Satz V. Bei der Wanderung des Balkens wandert der unter einem bestimmten Querschnitt Q_1 liegende Punkt $\bar{Q}_1$ der Schlußlinie auf der ihm »zugeordneten« Tangente $\bar{B}_1\,\bar{C}_1$. für welche

$$\bar{B}_0\,\bar{B}_1 : \bar{B}_1\,\bar{B}_n = \bar{C}_0\,\bar{C}_1 : \bar{C}_1\,\bar{C}_n = B\,Q_1 : Q_1\,C \quad \text{ist}^1).$$

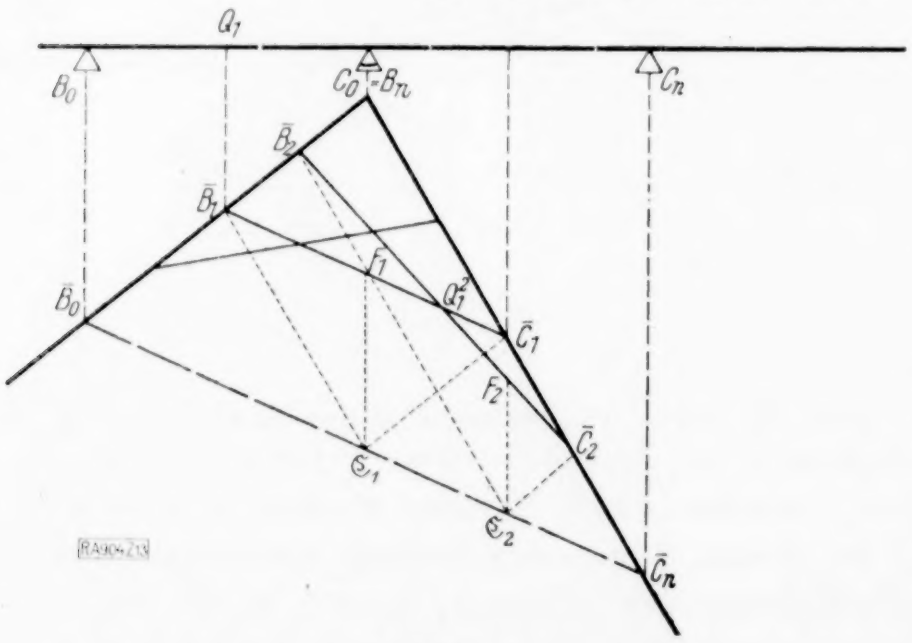


Abb. 13.

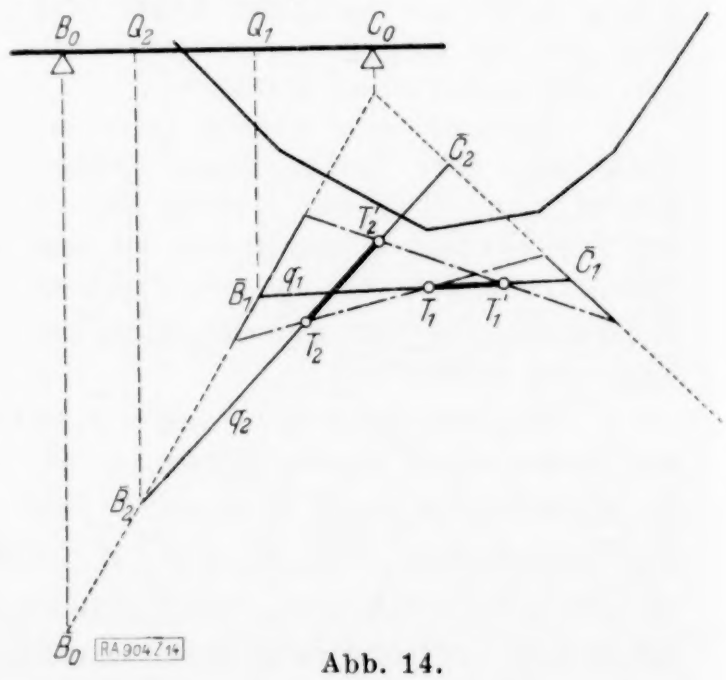


Abb. 14.

5. Die Bedeutung der kritischen Stellungen und die negative Maximalmomentenfläche über $B\,C$. Zur Bestimmung des maximalen Momentes an einem bestimmten Querschnitt Q ist nur noch nötig zu untersuchen, an welcher Stelle das Ver-

[1]) In Abb. 13 wurden der Anschaulichkeit halber die Verhältnisse so gewählt, daß der Scheitel der Parabel zwischen den gezeichneten Stücken der Bestimmungstangenten liegt. Satz V, sowie alle folgenden Ableitungen gelten jedoch für jede beliebige Lage der Bestimmungstangentenstücke zueinander.

tikalenstück zwischen Seilpolygon und der dem Querschnitt zugeordneten Parabeltangente einen maximalen Wert erreicht.

Diese Frage werde zunächst für die negativen Momente an den Querschnitten zwischen B und C beantwortet:

In Abb. 14 ist dem Querschnitt Q_1 des Balkens die Schlußlinie q_1 und dem Querschnitt Q_2 die Schlußlinie q_2 zugeordnet. Der unter dem Querschnitt Q_1 liegende Punkt $\bar{Q}_1$ wandert aber nicht die ganze ihm zugeordnete Tangente q_1 entlang, sondern nur zwischen den Endtangenten t und t', d. h. von T_1 bis T_1', desgleichen der Punkt $\bar{Q}_2$ auf q_2 von T_2 bis T_2'. Da die Wanderung jedes Punktes $\bar{Q}$ zwischen Anfangs- und Endlage jedoch längs einer geraden Linie erfolgt, dieselbe aber auf der konvexen Seite des Seilpolygons liegt, so folgt, daß $\bar{Q}$ den größten vertikalen Abstand vom Seilpolygon nur in einer seiner Endlagen, also entweder in T oder in T' haben kann.

Satz VI. Das negative maximale Biegungsmoment kann an irgend einem Querschnitt zwischen B und C nur dann auftreten, wenn die Schlußlinie $\bar{B}\,\bar{C}$ eine Endtangente ist, d. h. nur in einer »kritischen« Stellung des Lastenzuges.

Es sind also bei der Bestimmung der maximalen negativen Biegungsmomente an einem Querschnitt zwischen den Mittelstützen B und C die zwischen je zwei Endtangenten liegenden Schlußlinien ganz zu vernachlässigen und nur noch die Momente der einzelnen Querschnitte für die verschiedenen kritischen Stellungen miteinander zu vergleichen. Dies geschieht auf folgende einfache Weise: Man zeichne zunächst mit Hilfe eines Laufstreifens für den sich bewegenden Balken alle kritischen Schlußlinien des Seilpolygons auf (Abb. 15). Alsdann trage man (Abb. 16) über einer Strecke $\bar{B}\,\bar{C}$ (als einer horizontalen

Abb. 15.

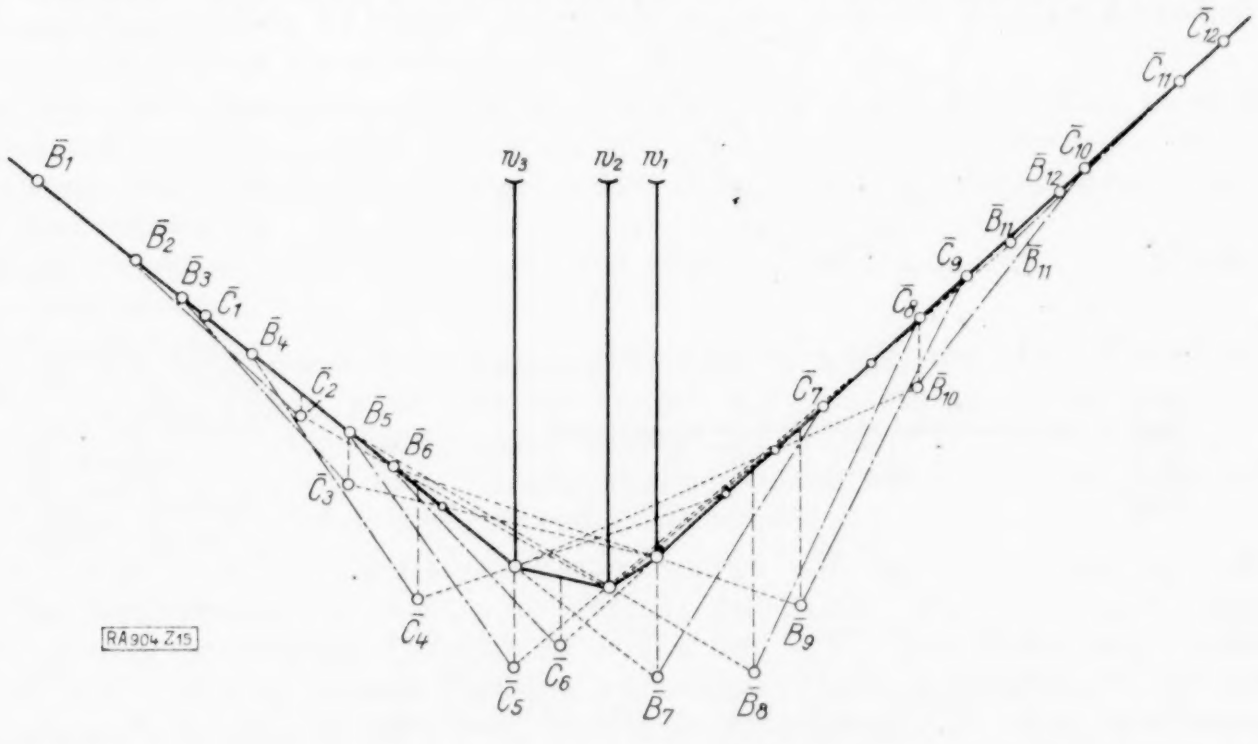
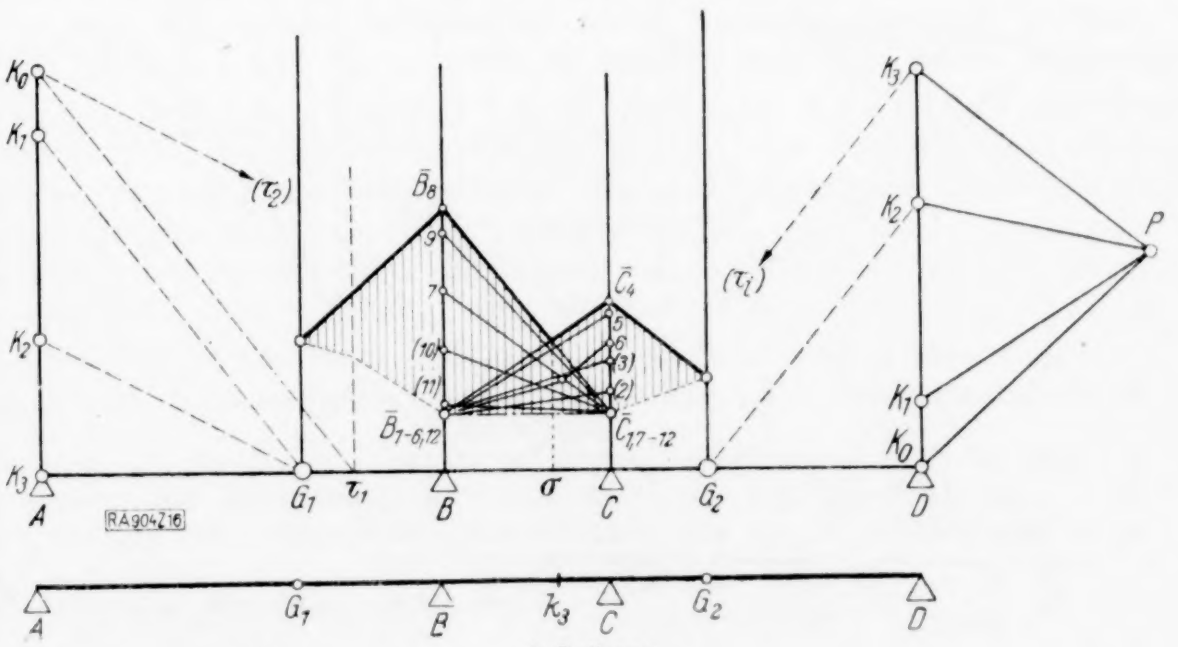


Abb. 16.



Laufstreifen.

Schlußlinie) alle kritischen Momentenflächen auf, deren Maße man aus Abb. 15 abgreifen kann. Die äußerste Begrenzung aller dieser Flächen ist zugleich die Begrenzung der negativen Maximalmomentenfläche für das Balkenstück $B\,C$. Aus der Zugehörigkeit der einzelnen Stücke dieser obersten Begrenzung zu den verschiedenen kritischen Stellungen des Balkens erkennt man die gefährlichsten Stellungen des Lastenzuges für die einzelnen Querschnitte.

In Abb. 16 wurden auch die Maximalmomentenflächen für die an BC anschließenden Ausleger nach der in Abschnitt 2 gegebenen Anweisung gezeichnet. Die maximalen Stützmomente in B und C mußten sich aus den Maximalmomentenflächen für die Ausleger und $\frac{1}{2}$ der Maximalmomentenfläche für das Balkenstück BC in gleicher Größe und als der gleichen kritischen Stellung zugeordnet ergeben. Für den in Abb. 15/16 gezeichneten Fall tritt das maximale Stützmoment in B bei der 8. kritischen Stellung (k_2 über G_1), in C bei der 4. kritischen Stellung (k_3 über G_2) ein. Für dieselben Stellungen tritt das negative Maximalmoment an den den Stützen benachbarten Querschnitten ein (von τ_1 bis σ, wenn k_2 über G_1; von σ bis G_2, wenn k_3 über G_2). Im übrigen bringt für die Querschnitte zwischen G_1 und τ_1 k_1 über G_1 das maximale Moment.

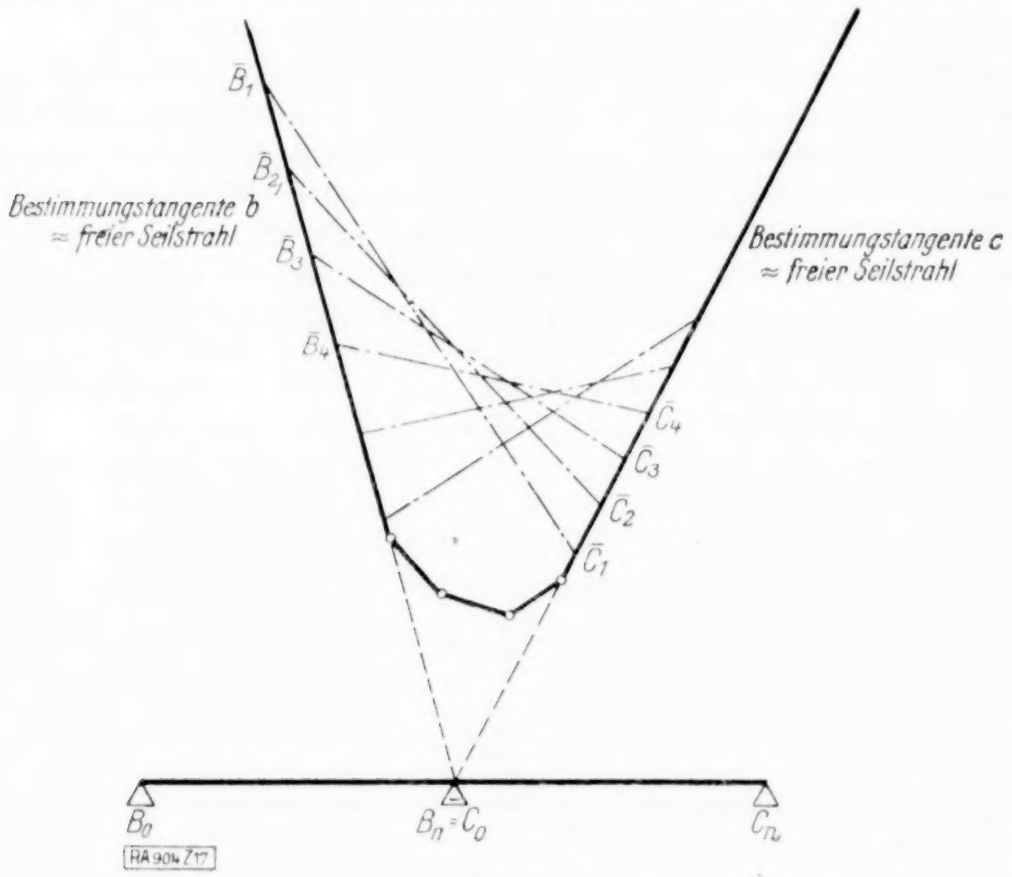


Abb. 17.

6. Das positive Maximalmoment an einem Querschnitt zwischen den Mittelstützen B und C. Es liegt nahe, bei der Untersuchung der positiven Maximalmomente an einem Querschnitt zwischen den Mittelstützen eines Auslegerbalkens die Ergebnisse für den einfachen Balken heranzuziehen, bei dem es sich auch nur um positive Momente handelt, und für den die einzelnen Momentenflächen ganz ähnlich vom Seilpolygon und den den Querschnitten zugeordneten Parabeltangenten begrenzt werden. (Vergleiche hierzu Abschnitt 4).

Jedoch sind zwei grundlegende Unterschiede zu beachten. Zunächst fallen für

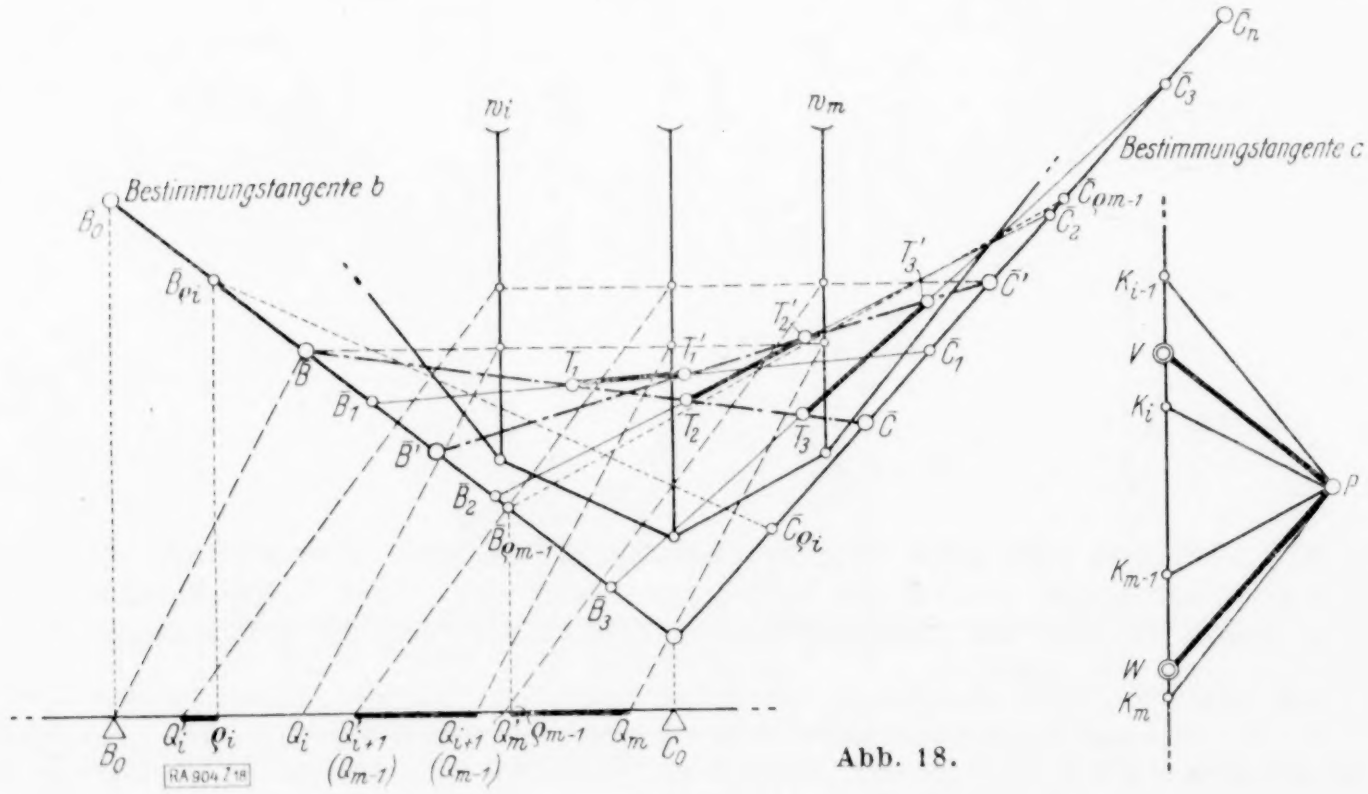


Abb. 18.

den Auslegerbalken nicht wie beim einfachen Balken die beiden äußersten (freien) Seilstrahlen mit den Bestimmungstangenten zusammen (vergl. Abb. 17 mit Abb. 18). Außerdem gelten alle die übertragenen Betrachtungen nur für je eine Verschiebung zwischen zwei kritischen Stellungen des Lastenzuges. Sieht man jedoch zunächst von dieser Beschränkung ab, so folgt, da jeder Punkt Q auf einer Geraden und, soweit an einem Querschnitt Q überhaupt positive Momente auftreten, auf der konkaven Seite des Seilpolygons wandert — ebenso wie beim einfachen Balken, daß die Querschnitte aller Schlußlinien, deren Parallelen durch einen bestimmten Eckpunkt des Seilpolygons das Seilpolygon nicht schneiden, unter derselben Last des Lastenzuges (nämlich unter der jenem Eckpunkt entsprechenden) das maximale Biegungsmoment erleiden.

Das sind also jeweils alle Querschnitte zwischen 2 Querschnitten ϱ_ν und $\varrho_\nu+1$ (Abb. 18), deren zugeordnete Schlußlinien den beiden die Ecke bildenden Seilstrahlen parallel sind. Für die Querschnitte ϱ_ν und $\varrho_\nu+1$ selbst tritt das maximale Moment solange ein, wie ϱ_ν bzw. $\varrho_\nu+1$ unter dem seiner zugeordneten Schlußlinie parallelen Seilstrahl, d. h. zwischen den beiden am Ende dieses Seilstrahls sich befindenden Kräften wandert. Denkt man sich nunmehr zu allen den Parabeltangenten, die den zwischen B und C liegenden Querschnitten entsprechen, Parallelen durch den Pol des Kräfteplans gezogen, so fallen alle diese Parallelen in einen Winkel, dessen Schenkel von den Parallelen zu den Bestimmungstangenten b und c gebildet werden, denn b und c sind die den Stützquerschnitten B und C zugeordneten Parabeltangenten. Die Schnittpunkte dieser Parallelen zu den Bestimmungstangenten mit dem Kräftezug seien V und W. Dann folgt aus Satz VI sofort

Satz VII: Teilt man das Balkenstück BC in demselben Verhältnis, wie die Polstrahlen des Kräfteplans die Strecke VW teilen, so tritt für jeden zwischen 2 Teilpunkten liegenden Querschnitt dann das maximale Moment ein, wenn diejenige Kraft über ihm steht, die seinem Abschnitt entspricht, für die Teilpunkte selbst, solange die den beiden benachbarten Abschnitten entsprechenden Kräfte ihn einschließen.

Den äußersten Abschnitten des Balkenstückes sind dabei die Kräfte zugeordnet, auf denen V bzw. W liegt, denn die Parallelen zu PV bzw. PW und deren benachbarten Strahlen durch die diesen Kräften entsprechenden Eckpunkte des Seilpolygons schneiden dieses nicht.

(Der Fall, daß V oder W außerhalb des Kräftezuges liegen, wird in Abschnitt 8 behandelt werden).

7. Die Fläche der positiven Maximalmomente zwischen den Mittelstützen B und C. Obwohl im vorigen Abschnitt das Gesetz der Zuordnung der einzelnen Querschnitte zu den Stellungen des Lastenzuges angegeben werden konnte, so gelangt man auf diese Weise noch nicht zu einer Konstruktionsmethode der Maximalmomentenfläche selbst. Dies gelingt jedoch durch den folgenden Kunstgriff:

Der im vorigen Abschnitt definierte Punkt V liege auf der Kraftstrecke $k_i = K_{i-1}\,K_i$ und W auf der Kraftstrecke $k_m = K_{m-1}\,K_m$ (vergl. Abb. 19). Nun verlängert man die 2 Seilstrahlen, deren zugehörige Polstrahlen PK_{i-1} und PK_m den Kräftezug außerhalb von V uud W, aber diesen beiden Punkten nächstbenachbart, schneiden, rückwärts bis zum Schnitt $[S_{i-1}]$ bzw. $[S_{m+1}]$ mit den Bestimmungstangenten [1]). Die Bestimmungstangenten können jetzt als letzte Seilstrahlen eines Seilecks aufgefaßt werden, dessen äußerste Kräfte $[k_{i-1}] = VK_{i-1}$ und $[k_{m+1}] = K_mW$ negativ sind und deren Wirkungslinien durch die Punkte $[S_{i-1}]$ und $[S_{m+1}]$ gehen. Jetzt legt man 2 Punkte $\bar{B}$ und $\bar{C}$ auf den Bestimmungstangenten fest, die den Horizontalabstand $BC = l$ von einander haben, d. h. also die Endpunkte irgend einer Schlußlinie. Nunmehr verwende man den Gedanken von Stahl [2]): Die Schlußlinie wird festgehalten, dagegen läßt man den Lastenzug horizontal mit einer Geschwindigkeit h und den Kräftezug im Kräfteplan vertikal mit einer Geschwindigkeit v wandern. Dann drehen sich die Seilstrahlen des Seilecks je um einen festen Punkt $\bar{\varrho}_\nu$ ($\nu = (i-2)$ bis $(m+1)$), wenn man nur den ersten Seilstrahl immer durch denselben Punkt hindurchgehen läßt. Es seien die Horizontalabstände dieser

[1]) Die Bezeichnung [] für die eingeführten Hilfskräfte wurde gewählt, da im allgemeinen Falle zu den regulären Kräften des Kräftezuges auch eine Kraft k_{i-1} und eine Kraft k_{m+1} gehören. Nur werden diese Kräfte für die hier angestellten Betrachtungen, die nur k_i bis k_m umfassen, nicht mehr gebraucht.

[2]) W. Stahl, Zeitschr. d. V. d. I. 1877, S. 7.

Punkte voneinander $[r_{i-1}]$, $r_i, \ldots r_m, [r_{m+1}]$. Dann ist der Horizontalabstand des ersten vom letzten Punkte gleich der algebraischen Summe $([r_{i-1}] + r_i + \ldots + r_m + [r_{m+1}]) = r$. Dabei ist jedes $r_\nu = k \cdot h/v$, also $r = h/v \cdot ([k_{i-1}] + k_i + \ldots + k_m + [k_{m+1}])$.

Wählt man das Verhältnis h/v so, daß $r = BC = l$ wird (d. h. $h/v = l : ([k_{i-1}] + k_i + \ldots + [k_{m+1}]) = l : VW$) und läßt den ersten Seilstrahl immer durch den Anfangspunkt $\bar{B}\,(= \bar{\varrho}_{i-2})$ der festgehaltenen Schlußlinie laufen, so muß der Endseilstrahl immer durch den Endpunkt $\bar{C}\,(= \bar{\varrho}_{m+1})$ jener festgehaltenen Schlußlinie gehen. Die Vertikalen durch die übrigen Drehpunkte $\bar{\varrho}_\nu$ teilen den Horizontalabstand der Punkte $\bar{B}$ und $\bar{C}$ im Verhältnis $[k_{i-1}] : k_i : \ldots : k_m : [k_{m+1}]$. Dabei liegen die Punkte $[\bar{\varrho}_{i-1}]$ und $[\bar{\varrho}_m]$ außerhalb der Vertikalen durch BC, wie auch K_{i-1} und K_m außerhalb von VW liegen. Die unter den übrigen $\bar{\varrho}_\nu$ liegenden Querschnitte ϱ_ν des Balkens sind dieselben wie die Querschnitte ϱ_ν in Abschnitt 6.

Satz VIII. Die Drehpunkte der Seilstrahlen liegen auf Vertikalen, die das Balkenstück BC innerlich bzw. äußerlich in demselben Verhältnis teilen wie die Polstrahlen PK_{i-1} bis PK_m die Kraftstrecke VW.

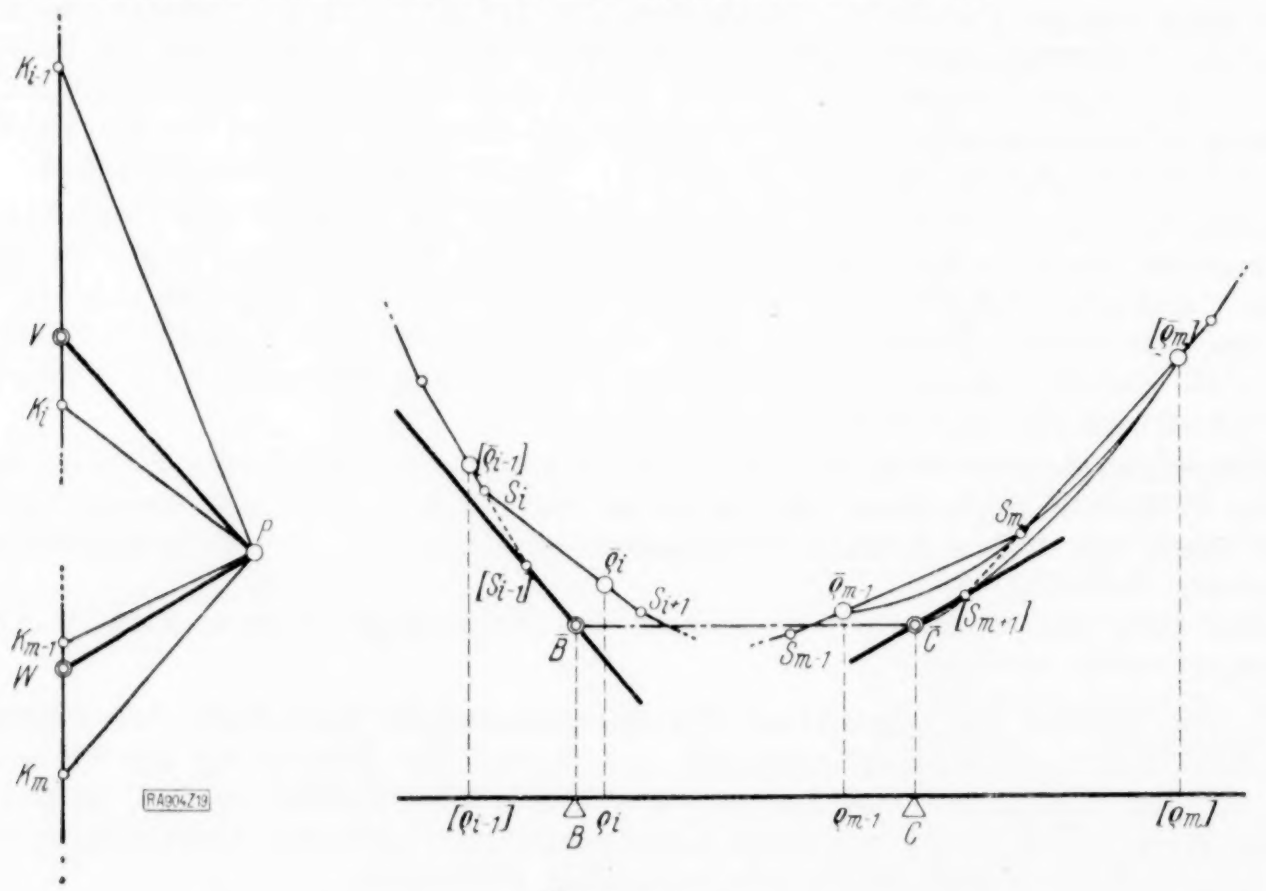


Abb. 19.

Die einzelnen Seilstrahlen bilden bei der Drehung zueinander projektive Strahlenbüschel und die Schnittpunkte entsprechender Strahlen (d. h. hier die Ecken des Seilecks) wandern auf Parabeln mit vertikalen Achsen. Für alle Querschnitte zwischen B und C folgt hieraus sofort der im vorigen Abschnitt abgeleitete Satz VII. Die Parabelbögen zwischen den Vertikalen durch die $\bar{\varrho}_\nu$ begrenzen die Maximalmomentenfläche über der Schlußlinie $\bar{B}\bar{C}$. Dieser Parabelbogenzug überschneidet die Schlußlinie innerhalb von BC (vergl. Abb. 19), so daß nur zwischen den Stützen positive Momentenstrecken auftreten, wie zu erwarten war.

8. Einführung einer ideellen ruhenden Belastung. Um die Konstruktion dieser Maximalmomentenfläche zu erleichtern, suchen wir eine ideelle ruhende Belastung des Balkens, die die gleichen Momentstrecken über den Querschnitten zwischen B und C liefert. Es sind daher zunächst die Größen der stetigen Belastungen zu ermitteln, deren Seilpolygone durch die Parabeln der soeben bestimmten Maximalmomentenfläche repräsentiert werden. Dann ist nur noch zu beachten, daß die Parabeln nicht ohne Ecke ineinander übergehen, sondern daß man zur Erklärung dieser Ecken über den Teilungsquerschnitten ϱ_ν noch ideelle Einzelkräfte annehmen muß.

Die Tangente an einen Parabelbogen über $r_\nu = \varrho_{\nu-1}\,\varrho_\nu$ in $\bar{\varrho}_{\nu-1}$ ist parallel dem Polstrahl $PK_{\nu-1}$ für die Lage des Kräftezuges, die der Stellung k_ν über $\varrho_{\nu-1}$ entspricht.

Die Tangente an demselben Parabelbogen in ϱ_ν ist parallel dem Polstrahl PK_ν' für die Lage des Kräftezuges, die der Stellung k_ν über ϱ_ν entspricht. Diesem Wandern des Lastenzuges um r_ν entspricht ein Wandern des Kräftezuges im Kräfteplan um k_ν. Die zu den Tangenten parallelen Polstrahlen schneiden daher aus dem Kräftezug eine Gesamtstrecke von der Länge $2\,k_\nu$ aus, d. h. der Parabelbogen über r_ν entspricht einer positiven kontinuierlichen Belastung der Strecke $r_\nu\,(=\varrho_{\nu-1}\,\varrho_\nu)$ mit einer Gesamtlast von $2k_\nu$.

Durch einen analogen Gedankengang ordnet man auch dem äußersten Parabelbogen über $[r_{i+1}]$ eine ideelle negative kontinuierliche Belastung mit einer Gesamtlast von $2\,VK_{i-1} = 2\,[k_{i-1}]$ zu, und der Parabel über $[r_{m+1}]$ eine negative kontinuierliche Belastung mit einer Gesamtlast $2\,K_{m+1}\,W = 2\,[k_{m+1}]$. Es gilt also auch für diese äußersten Parabelbogen, daß sie einer kontinuierlichen Belastung entsprechen, die der Länge des unter dem Parabelbogen liegenden Balkenstückes proportional ist. Es müssen sich also die negativen ideellen kontinuierlichen Belastungen der Strecken $B[\varrho_{i-1}]$ und $C[\varrho_m]$ aufheben gegen die positiven Belastungen derselben Strecke durch die über $[\varrho_{i-1}]\varrho_i$ und $\varrho_{m-1}\,[\varrho_m]$ liegenden Parabeln. Uebrig bleibt eine ideelle positive kontinuierliche Belastung der ganzen Strecke BC mit der Gesamtlast $2\,VW$.

Die in den Ecken des Parabelzuges wirkenden Kräfte dagegen sind proportional den Kraftstrecken, die die Parallelen durch den Pol des Kräfteplanes zu den Tangenten in ϱ_ν an die beiden benachbarten Parabeln aus dem Kräftezug ausschneiden. Den beiden Tangenten entsprechen Stellungen des Lastenzuges, zwischen denen eine Verschiebung des Lastenzuges um die Strecke $-a_\nu$ liegt, wenn man für die a_ν die Richtung von k_ν nach $k_{\nu+1}$ als positiv anspricht. Dazu gehört ein Wandern des Kräftezuges im Kräfteplan um die Strecke $-a_\nu \frac{VW}{BC}$. Für die Ecken über den äußeren Teilungsquerschnitten $[\varrho_{i-1}]$ bzw. $[\varrho_m]$ ergeben sich dabei Kräfte von den Größen $[a_{i-1}]\frac{VW}{BC}$ $\left(\text{bzw. } [a_m]\frac{VW}{BC}\right)$, die aber positiv sind, da zwischen den beiden hierzu gehörigen Stellungen ein Rückwärtswandern des Lastenzuges stattfindet. Zusammenfassend erhält man

Satz IX: Die in Abschnitt 6 gefundene positive Maximalmomentenfläche stimmt überein mit der Momentenfläche für eine ideelle ruhende Belastung. Diese ideelle ruhende Belastung besteht aus einer über BC gleichmäßig verteilten positiven kontinuierlichen Last vom Gesamtwert $2\,VW$ und in den Teilungsquerschnitten wirkenden Einzelkräften von den Größen $a_\nu \frac{VW}{BC}$. Diese Einzelkräfte sind negativ über den inneren positiv über den äußeren Teilungsquerschnitten.

Würde man diese Einzelkräfte mit umgekehrtem Vorzeichen der Schlußlinie einfügen, so erhielte man etwa das in Abb. 20 gezeichnete Bild. Hier sind k_i, $k_{i+1}\,(=k_{m-1})$, k_m die in Frage kommenden Lasten des Lastenzuges; $[k_{i-1}]$ und $[k_{m+1}]$ die negativen Hilfskräfte. $\overline{L_{i-2}\,L_{i-1}}$, $\overline{L_{i-1}\,L_i}\,(=\overline{L_{i-1}\,L_m})$, $\overline{L_m\,L_{m+1}}\,(=\overline{L_i\,L_{m+1}})$ und $\overline{L_{m+1}\,L_{m+2}}$ sind die ideellen Einzelkräfte von der Größe $a\,\frac{VW}{BC}$. LP ist parallel der Schlußlinie MN,

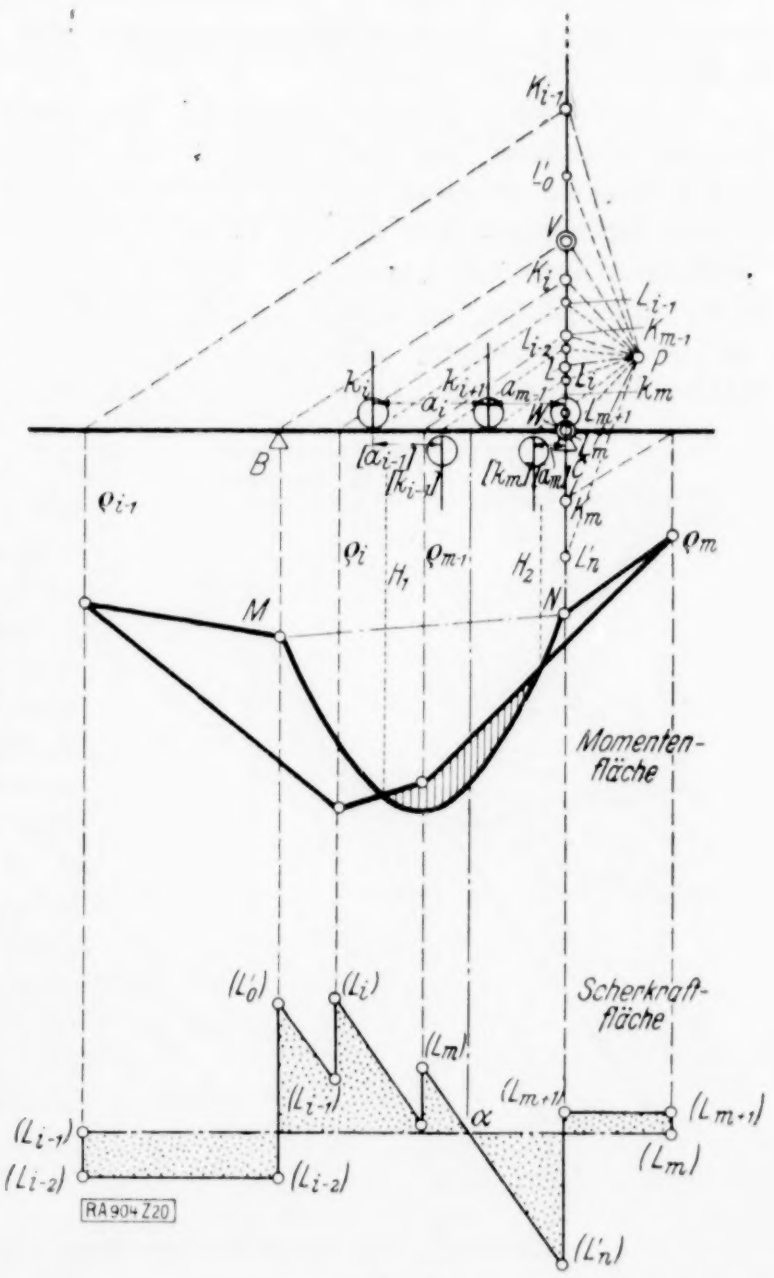


Abb. 20.

so daß $L_0' L_n'$ ($= 2\,V\,W$, also die Resultierende der ideellen kontinuierlichen Belastung) symmetrisch zu L aufgetragen werden mußte. Die schraffierte Fläche ist die Fläche der positiven Maximalmomente. Jenseits der Querschnitte H_1 und H_2 treten überhaupt keine positiven Momente mehr auf. Der besseren Uebersicht halber wurde unter der Momentenfläche noch die zugehörige Scherkraftlinie gezeichnet, aus der sich auch die Lage des »gefährlichsten« Querschnittes am genauesten in bekannter Weise bestimmen läßt.

9. Die Gesamtmaximalmomentenfläche. Nach dem bisher Gewonnenen muß noch einmal auf Abb. 18 zurückgegriffen werden: Zu Beginn des Abschnittes 6 wurde schon erwähnt, daß der einem Querschnitt Q zugeordnete Punkt $\bar{Q}$ auf seiner Wanderung nicht die ganze ihm zugeordnete Parabeltangente durchläuft, sondern nur das zwischen den Endtangenten liegende Stück, also auch nicht immer unbedingt die Angriffslinie der dem Querschnitt Q zugeordneten Kraft passieren muß. In einem solchen Falle kann die Momentenstrecke über Q nur entweder auf der einen oder auf der anderen Endtangente ihren größten Wert erreichen. Nennt man den von einer Kraft k_ν in der Stellung BC getroffenen Querschnitt Q_ν und den in der Lage $B'C'$ getroffenen Querschnitt Q_ν' (vergl. Abb. 18), so sind die Querschnitte zwischen Q_ν und Q_ν' die einzigen, die die Angriffslinie von k_ν wirklich passieren. Soweit sie zu dem der Kraft k_ν zugeordneten Abschnitt r_ν gehören, erreichen sie ihr positives Maximalmoment bei der Wanderung des Balkens von BC nach $B'C'$. Diejenigen Querschnitte des der ν^{ten} Kraft entsprechenden Abschnittes r_ν, die nicht zu den Querschnitten von Q_ν bis Q_ν' gehören, erreichen während des Wanderns zwischen den zwei kritischen Stellungen den durch die Parabelfläche gegebenen Extremwert nicht. Ihr größtes erreichbares Moment erleiden sie zunächst entweder in der Anfangs- oder in der Endlage ($B\,C$ oder $B'\,C'$) des Balkenstückes, also in einer der benachbarten kritischen Stellungen.

Das Gleiche gilt in dem in Abschnitt 6 noch nicht behandelten Fall, daß der Punkt V bzw. W im Kräftezug außerhalb der eigentlichen Kraftstrecke, also jenseits von K_0 bzw. K_n liegt, für die Randabschnitte $B\varrho_0$ bzw. $\varrho_n C$, die den Kraftstrecken VK_0 bzw. $K_n W$ proportional sind.

Setzt man jedoch nunmehr alle die bisher gewonnenen Maximalmomentenflächen für das Wandern des Balkens zwischen je zwei kritischen Stellungen zur Gesamtmaximalmomentenfläche zusammen, so werden im allgemeinen alle Parabelflächenstücke stetig

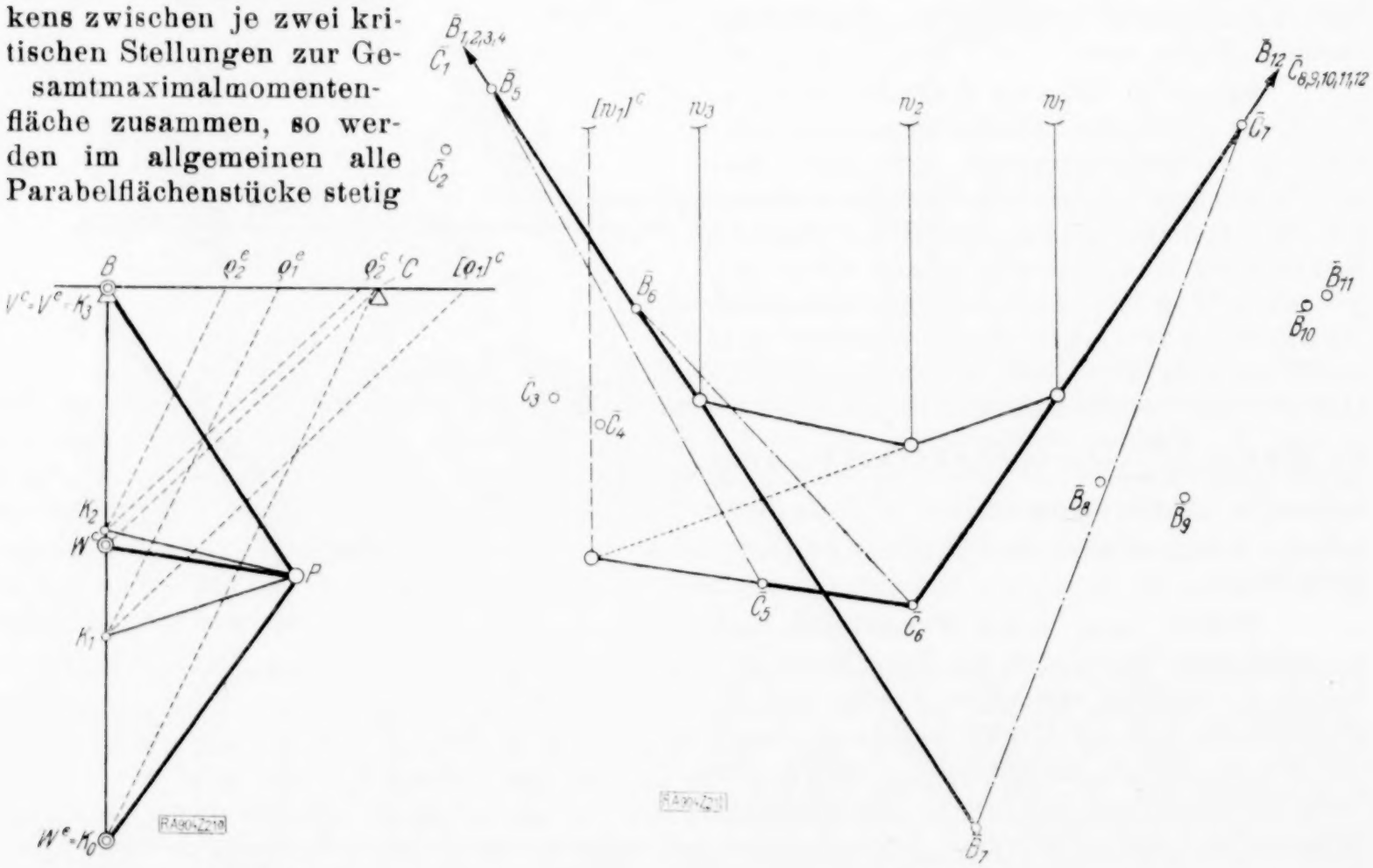
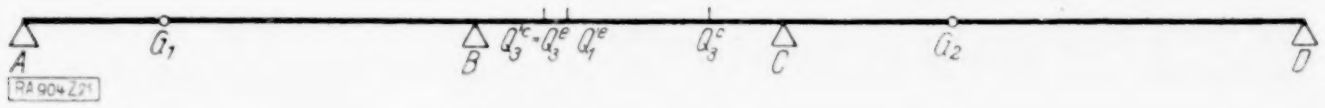


Abb. 21 a. Abb. 21 b.

Laufstreifen.



aneinander anschließen und die den kritischen Stellungen zugeordneten Flächen werden nur den Uebergang von einem Flächenstück zum andern markieren. Jedoch sind sie auch dann zur Kontrolle und zum Verständnis der Gesamtzeichnung wertvoll.

Damit das Aneinandersetzen der einzelnen Teilflächen ein wohlgeordnetes Bild der Gesamtmaximalmomentenfläche liefert, wird man zuletzt alle diese Flächenstücke auf eine gemeinsame horizontale Schlußlinie reduzieren, wie dies auch in Abb. 21 geschehen ist.

In Abb. 21 wurde die Konstruktion der Fläche der positiven Maximalmomente zwischen den Mittelstützen des Auslegerbalkens $G_1 B C G_2$ für einen über den Balken wandernden Lastenzug von drei Lasten k_1, k_2, k_3 exakt durchgeführt.

Abb. 21 a zeigt das Kräftepolygon, Abb. 21 b das Seilpolygon des Lastenzuges mit den Wirkungslinien w_1, w_2, w_3 der einzelnen Kräfte. Die kritischen Punkte B_1 bis B_{12} und C_1 bis C_{12} wurden konstruiert. Man übersieht leicht, daß positive Momente nur in der kritischen Stellung 6 und zwischen den Stellungen 5 und 6 sowie 6 und 7 eintreten können.

Es wurde daher nach dem Muster von Abb. 20 die Maximalmomentenfläche zwischen den Stellungen 5 und 6 (Abb. 21 c) und die Maximalmomentenfläche zwischen den Stellungen 6 und 7 (Abb. 21 e) gezeichnet, wozu die ϱ_ν aus dem Kräftezug in Abb. 21 a gefunden wurden. Die oberen Indizes unterscheiden zwischen den zu Abb. 21 c und zu Abb. 21 e gehörenden Größen. $[w_1]^c$ ist die Wirkungslinie der negativen Hilfskraft $[k_1]^c$, deren Größe die Lage von $[\varrho_1]^c$ und deren Lage die Größe der (in Abb. 21 c) in $[\varrho_1]$ wirkenden ideellen Einzellast mit bestimmt. Die ideellen Kräfte $L_\nu L_{\nu+1}$ wurden wie in Abb. 20 konstruiert, die Konstruktion jedoch der Uebersichtlichkeit halber nicht mit ausgezogen. Die Querschnitte $Q_\nu Q'$, zwischen denen die in Abb. 21 e konstruierten Maximalmomentenflächen nur gelten, wurden hier mit Hilfe des Balken-Laufstreifens übertragen. Die schraffierten Felder in Abb. 21 c und Abb. 21 e sind also die Flächen, die allein Anteil an der Bildung der Maximalmomentenfläche haben können. Zu diesen kommt hinzu die kritische Stellung 6 (Abb. 21 d). Ueber Querschnitt $Q_3'^c$ ($\equiv Q_3{}^e$) stimmen die Ordinatenabschnitte aller drei Flächen überein und zwar wenn k_3 über diesen Querschnitt steht, d. h. in der sechsten kritischen Stellung. Die Parabelbögen rechts und links von diesem Querschnitt begrenzen aber größere Ordinaten als die geraden Linien der Abb. 21 d. Also sind für die Maximalmomentenfläche nur die schraffierten Parabelsegmente der Abb. 21 c und 21 e zusammenzusetzen. Dies wurde in Abb. 21 f durchgeführt. Die Größen der Lasten l^c ($= (L_0)^c (L_n)^c$), $l_1{}^e$ ($= (L_0)_1{}^e (L_n)_1{}^e$) und $l_2{}^e$ ($= (L_0)_2{}^e (L_n)_2{}^e$), die durch die Teilparabelbögen zwischen den Vertikalen durch B und H^c, B und $H_1{}^e$, $H_2{}^e$ und C repräsentiert werden, sind den Längen BH (bzw. HC) proportional. Indem man bei der Zeichnung der Gesamtmaximalmomentenfläche den Pol jedesmal in halber Höhe der

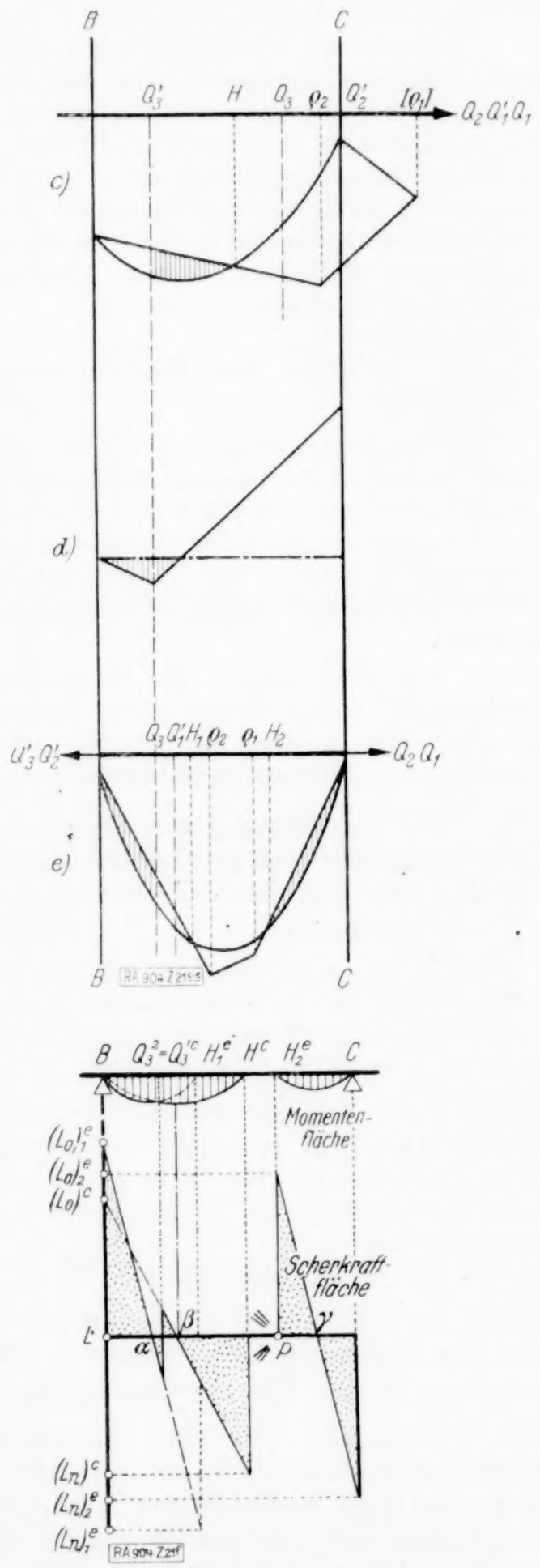


Abb. 21 c bis 21 f.

das Parabelstück repräsentierenden Last wählt (nämlich auf der Horizontalen durch L) erreicht man, daß die Schlußlinien dieser Parabelstücke alle wagerecht werden. Unter der Momentenfläche wurde aus dem Kräftezug heraus die Scherkraftlinie zu dieser Momentenfläche konstruiert, um aus ihr die gefährlichsten Querschnitte α, β, γ und unter diesen wieder den gefährlichsten β zu bestimmen.

Da es möglich ist, zu der positiven Gesamtmaximalmomentenfläche eine zugeordnete Scherkraftlinie anzugeben, die nur von geraden Linien begrenzt wird, so ist hiermit der Vergleich der Gesamtmaximalmomentenfläche mit der Momentenfläche für eine ruhende, aus kontinuierlichen und aus Einzellasten bestehenden Belastung durchgeführt, da sich die zugehörige Belastung aus einer solchen Scherkraftfläche direkt ablesen läßt. Für die negative Maximalmomentenfläche ist es ohne weiteres möglich, eine zugeordnete ideelle ruhende Belastung zu finden, da diese Flächen nur von geraden Linien begrenzt werden. Die ideelle Belastung besteht also aus Einzellasten. Die Scherkraftlinie ist ein rechtwinkliger Polygonzug.

II. Teil: Der Gerbersche Balken unter einem gleichmäßigen stetigen Lastenzuge.

Die Anwendung der bisher entwickelten Verfahren wird um so komplizierter, je mehr Einzelkräfte den Lastenzug bilden, da die Anzahl der kritischen Stellungen mit der Anzahl der Lasten wächst (bei n Lasten $4n$ kritische Stellungen). Bei einer sehr großen Anzahl dicht aufeinanderfolgender Lasten von etwa gleicher Größe und gleichem Abstand empfiehlt sich daher ein Näherungsverfahren: Man ersetzt einen solchen Lastenzug durch eine gleichmäßige stetige Belastung von der gleichen Länge und dem gleichen Gesamtgewicht.

Die Konstruktion der Maximalmomentenfläche unter einer solchen gleichmäßigen stetigen Belastung ist in erster Linie von der Länge $s = EF$ dieses »Lastenzuges« abhängig, oder besser, vom Verhältnis dieser Länge zu den Längen des Auslegerbalkens und der anschließenden Koppelträger.

10. Zuordnung der Querschnitte eines Auslegers zu den Stellungen eines gleichmäßigen stetigen Lastenzuges und die zugehörige Maximalmomentenfläche.

Die Zuordnung geschieht folgendermaßen:

a) $EF < AG$.

Denkt man sich die gleichmäßige stetige Last von der Länge $s = EF$ nun zunächst in n gleiche Teile zerlegt und das Gewicht jedes einzelnen Teiles k/n in seiner Mittellinie angreifend, und geht mit wachsendem n zu der kontinuierlich belasteten Strecke s über, so folgt aus Satz II:

Satz X: An einem beliebigen Auslegerquerschnitt tritt unter einer gleichmäßigen stetigen Belastung dann das maximale Biegungsmoment ein, wenn diejenige Stelle S des Lastenzuges EF über dem Gelenk G steht, die den Lastenzug in demselben Verhältnis teilt, wie das Gelenk die Balkenstrecke AQ.

b) $EF (= A\hat{Q})^1) > AG$.

Ist $EF (= A\hat{Q}) > AG$, so gilt Satz X, der auf dem Asimontschen Satz beruht, nur für diejenigen Querschnitte Q, für die $AQ > EF$ ist, d. h. also erst von den Querschnitten $\hat{Q}$ an. Für die Querschnitte zwischen G und $\hat{Q}$ gilt

Satz XI: Für alle Querschnitte des Auslegers, für die $AQ < EF$ ist, tritt das maximale Biegungsmoment stets solange ein, als die ganze Strecke AQ von Last bedeckt ist[2]).

Mit Hilfe von Satz X und XI läßt sich die Maximalmomentenfläche für einen Ausleger leicht konstruieren.

---

[1]) $\hat{Q}$ bedeutet dabei denjenigen Querschnitt des Auslegers, über dem der Anfang (F) des Lastenzuges steht, wenn das Ende E gerade das äußere Ende des anschließenden Koppelträgers, also A, erreicht hat.

[2]) Man beachte, daß sich die Lage des der Stellung des Lastenzuges zugeordneten Querschnittes in derselben Richtung verschiebt wie der Lastenzug.

a) $EF < AG$.

Man zerlegt die stetige Belastung etwa in n gleiche Teile und konstruiert die den ausgewählten Punkten entsprechenden Teilpunkte τ_ν (Abb. 22). Die Maximalmomentenfläche wird dann begrenzt von dem letzten Seilstrahl und einer Kurve, deren einzelne Punkte man erhält, indem man entweder mit Hilfe von transparentem Papier die Verlängerungen der den einzelnen Teilungspunkten entsprechenden Schlußlinien mit den Vertikalen durch die Teilungsquerschnitte zum Schnitt bringt (vergl. Abschn. **3**) oder die Kurvenpunkte durch Parallelenziehen bestimmt, wie es in Abb. 22 geschehen ist.

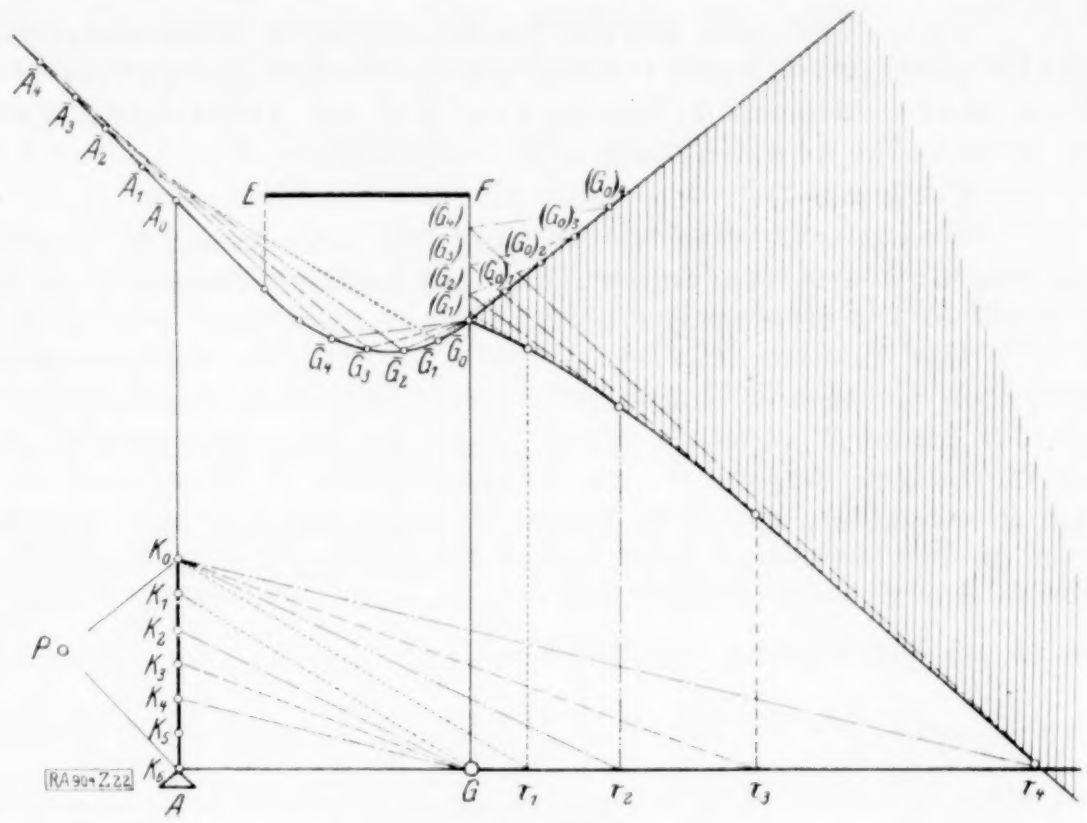


Abb. 22.

b) $EF > AG$.

Satz XII: Ist $EF > AG$, und zwar $EF = A\hat{Q}$, so stimmt die Maximalmomentenfläche zwischen den Ordinaten durch G und $\hat{Q}$ überein mit der einfachen Momentenfläche zwischen diesen Ordinaten unter demselben gleichmäßigen stetigen Lastenzuge für die Stellung des Lastenzuges EF über $A\hat{Q}$. Die restliche Maximalmomentenfläche zwischen den Vertikalen durch $\hat{Q}$ und B wird nach dem in Abb. 22 durchgeführten Verfahren gefunden.

11. Zuordnung der Querschnitte zwischen B und C zu den Stellungen eines über den Balken bewegten gleichmäßigen stetigen Lastenzuges. Es sei zunächst auf die bekannte Beziehung des Momentes M eines Querschnittes zwischen den Mittelstützen B und C zu dem Moment M_0 eines einfachen Balkens BC unter dem gleichen Lastenzuge und den Stützmomenten M_b und M_c hingewiesen [1]). Aus Abb. 23 läßt sich, wenn $BC = u$ und $QC = v$ und $BC = l$ gesetzt wird, diese Beziehung direkt ablesen.

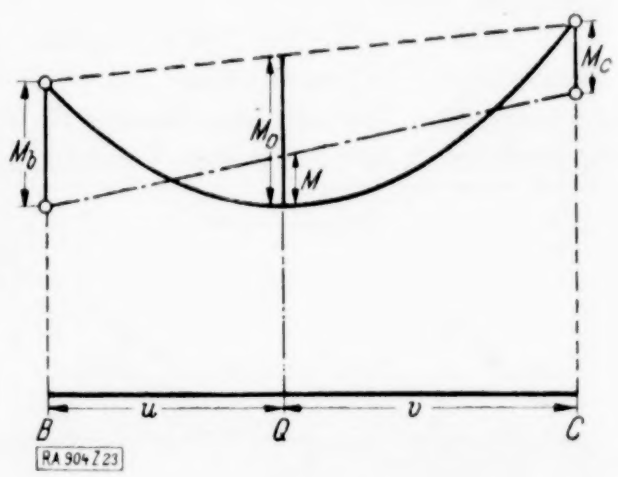


Abb. 23.

Satz XIII: $M = M_0 + \frac{v}{l} M_b + \frac{u}{l} M_c$, wobei zu beachten ist, daß M_0 positiv und M_b und M_c aber negativ sind.

a) $EF < BC$.

Aus Satz XIII folgt sofort

Satz XIV: Ist $EF < BC$, dann kann für ein beliebiges Q zwischen B und C das maximale negative Moment nur bei einer dem Stützquerschnitt G oder dem Stützquerschnitt C nach Satz X oder XI zugeordneten Stellung eintreten.

Die maximalen positiven Momente werden wie für den einfachen Balken gefunden, insbesondere gilt:

---

[1]) Müller-Breslau, Statik der Baukonstruktion, Leipzig 1912, 1. Auflage, Bd. 1, Abschnitt 6, S. 195.

Satz XV: An einem Querschnitt Q zwischen B und C tritt das maximale positive Moment ein, wenn diejenige Stelle S des Lastenzuges über ihm steht, die den Lastenzug EF in demselben Verhältnis teilt, wie der Querschnitt den Balken BC.

b) $EF > BC$.

Nunmehr sei zur Bestimmung der den einzelnen Querschnitten zugeordneten Stellungen ein Verfahren angewandt, daß meines Wissens hierzu noch nicht benutzt wurde, obwohl es für eine stetige Belastung am raschesten zum Ziele führt.

Das Moment, das eine über einen Balken wandernde Einzelkraft P an einem bestimmten Querschnitt hervorruft, ist $M = P\,m(x)$, wobei $m(x)$ das Moment ist, daß eine an der Stelle x wirkende Kraft $P = 1$ an dem Querschnitte Q ausübt. Um nunmehr zu einer stetigen Belastung vom Gesamtgewicht P übergehen zu können, denke man sich die gleichmäßig mit Last belegte Strecke $s = EF$ in n gleiche Teile $s/n = \Delta x$ zerlegt, und in der Mittellinie jeder dieser Strecken Δx eine Kraft P/n — oder durch die spezifische Belastung p ausgedrückt — $= p\,\Delta x$ angreifend. Eine jede dieser Teilkräfte übt in Q ein Moment von der Größe $\Delta M = \frac{P}{n}\,m(x)$ aus. Das Moment der Gesamtbelastung der Strecke $s = EF$ ist $M = \sum_{EF} \Delta M = \sum_{EF} \frac{P}{n}\,m(x) = p \sum_{EF} m(x)\,\Delta x$. Beim Grenzübergang zu einer kontinuierlich belasteten Strecke s wird $\lim_{n\to\infty} p \sum_{EF} m(x)\,\Delta x = p \int_E^F m(x)\,dx$.

Nennt man nunmehr die von der x-Achse und der für die Wirkung der Kraft 1 gezeichneten Einflußlinie des Querschnittes Q begrenzte Fläche die »Einflußfläche« des Biegungsmomentes für diesen Querschnitt (Abb. 24), so ist das von einer gleichmäßigen stetigen Belastung einer Strecke EF des Balkens im Querschnitte Q bewirkte Moment dem von den Vertikalen durch E und F aus der Einflußfläche ausgeschnittenen Flächenstück proportional.

Von dieser Einflußfläche ausgehend, gelangt man leicht zur Bestimmung der einem Querschnitt zugeordneten Stellung eines Zuges. Zunächst erkennt man sofort folgendes: Ein positives Maximalmoment wird für einen Lastenzug, für den $EF > BC$ ist, stets nur dann eintreten können, wenn das Balkenstück BC ganz mit Last bedeckt ist. Es handelt sich nur noch darum, zu bestimmen, wann die unter den über B und C hinausragenden Strecken des Lastenzuges liegenden Stücke der negativen Einflußfläche ein Minimum aufweisen.

Ein negatives Maximum wird nach Satz XIII auch jetzt für die der Stütze B benachbarten Querschnitte in der dem Stützquerschnitt B zugeordneten Stellung des Lastenzuges, für die der Stütze C benachbarten Querschnitte in der dem Stützquerschnitt C zugeordneten Stellung des Lastenzuges erreicht werden, da für erstere $v \gg u$, für letztere $u \gg v$ [1]). Jedoch ist es für mehr in der Mitte von BC liegende Querschnitte bei einem langen Lastenzuge möglich, daß noch größere negative Momente entstehen, wenn der Lastenzug an beiden Enden über BC hinausragt.

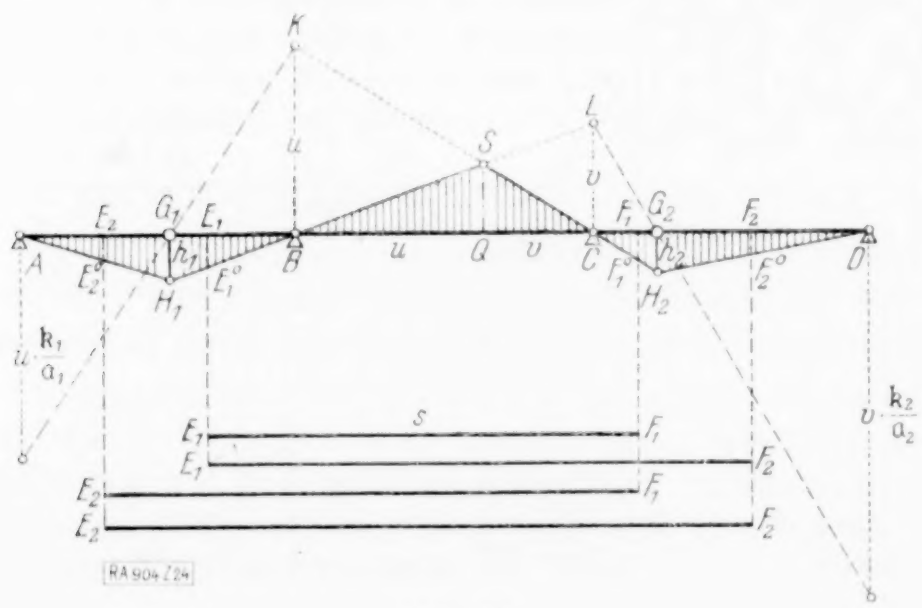


Abb. 24.

Wichtig ist die Erkenntnis, daß weder positive noch negative Maximalmomente an einem Querschnitt zwischen B und C entstehen können, wenn das eine Ende des Lastenzuges zwischen B und C, das andere aber auf einem Ausleger oder Koppelträger sich bewegt. Es bleibt also nur noch übrig, die Extremwerte des Momentes an einem Querschnitt zwischen B und C zu untersuchen, wenn (vergl. Abb. 24) entweder

[1]) Man beachte die Aenderung der Einflußlinie mit der Lage des Querschnittes, da $BK = u$ und $CL = v$ ist.

1. E und F jedes auf einem Ausleger (E_1, F_1) oder
2. E auf einem Ausleger, F auf dem Koppelträger der anderen Seite (E_1, F_2 bzw. E_2, F_1) oder
3. E und F jedes auf einem Koppelträger (E_2, F_2) wandert.

1. Fall: $E_1 F_1$. Es ist zu untersuchen, wann die Summe der Inhalte der Dreiecke $E_1 E_1{}^0 B$ und $C F_1{}^0 F_1$ einen Extremwert hat. Die Horizontalentfernung $E_1 F_1$ ist dabei konstant gleich der Länge s des Lastenzuges EF. Wird die Strecke $E_1 B$ als x bezeichnet, so ist $C F_1$ gleich $y = (s - x - l)$. Ist h_1 die Höhe des Einflußliniendreiecks über G_1 und h_2 die entsprechende Höhe über G_2, außerdem $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ die Auslegerlängen sowie $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ die Koppelträgerlängen, so sind die Höhen der Dreiecke $E_1 E_1{}^0 B$ und $F_1 F_1{}^0 C$ gleich $h_1 \frac{x}{\mathfrak{a}_1}$ bzw. $h_2 \frac{y}{\mathfrak{a}_2}$. Nach Strahlensatz ergeben sich die Größen von $h_1 = v \frac{\mathfrak{a}_1}{l}$ und $h = u \frac{\mathfrak{a}_2}{l}$. Die Summe der Inhalte der beiden Dreiecke $E_1 E_1{}^0 B$ und $F_1 F_1{}^0 C$ läßt sich als Funktion von x allein ausdrücken

$$S = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\mathfrak{a}_1} \cdot v \cdot \frac{\mathfrak{a}_1}{l} + \frac{1}{2} \frac{(s - l - x)^2}{\mathfrak{a}_2} \cdot u \cdot \frac{\mathfrak{a}_2}{l}.$$

Differentiation nach x ergibt als Bedingungsgleichung für einen Extremwert:

$\frac{dS}{dx} = \frac{v}{l} x - (s - l - x) \frac{u}{l} = 0$ oder $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$ also auch $\frac{x + u}{y + v} = \frac{u}{v}$, außerdem $\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{v + u}{l} > 0$.

Diese Ergebnisse lassen sich zusammenfassen zu

Satz XVI: Solange E sowie F je auf einem Ausleger wandern, erreicht das Biegungsmoment ein positives Maximum an einem Querschnitt Q, wenn diejenige Stelle S des Lastenzuges über Q steht, die den Lastenzug in demselben Verhältnis teilt wie der Querschnitt Q das Balkenstück BC[1]).

Die negativen Momente erreichen, solange die Enden des Lastenzuges je auf einem Ausleger wandern, kein Maximum, sondern nehmen nach den Grenzstellungen hin stetig zu.

Zu Satz XVI hätte man auch ohne Differenzieren an Hand von Abb. 25 durch die einfache geometrische Ueberlegung kommen können, daß ein Extremwert und zwar ein Minimum der (negativen) Dreiecksinhalte nur dann eintreten kann, wenn die Ordinaten der Einflußfläche über E_1 und F_1 einander gleich sind. Für die folgenden Ableitungen sei dieser kürzere geometrische Weg angewandt.

Ist die Länge des Lastenzuges $s < G_1 C$, sowie $s < B G_2$, so gibt es zu jedem Querschnitte eine ihm nach Satz XVI zugeordnete Stellung des Lastenzuges, für die E sowie F auf dem Ausleger liegen. Gilt eine dieser Ungleichungen nicht, so kann man Satz XVI nur anwenden, bis entweder $x = \mathfrak{a}_1$ oder $y = \mathfrak{a}_2$, d. h. nur für die Querschnitte zwischen einem Querschnitt $Q(\mathfrak{a}_1)$, für den $\frac{u}{v} = \frac{\mathfrak{a}_1}{s - G_1 C}$, bis zu einem Querschnitte $Q(\mathfrak{a}_2)$, für den $\frac{v}{u} = \frac{\mathfrak{a}_2}{s - B G_2}$. Für die übrigen Querschnitte gilt der im folgenden Abschnitt abzuleitende Satz XVII.

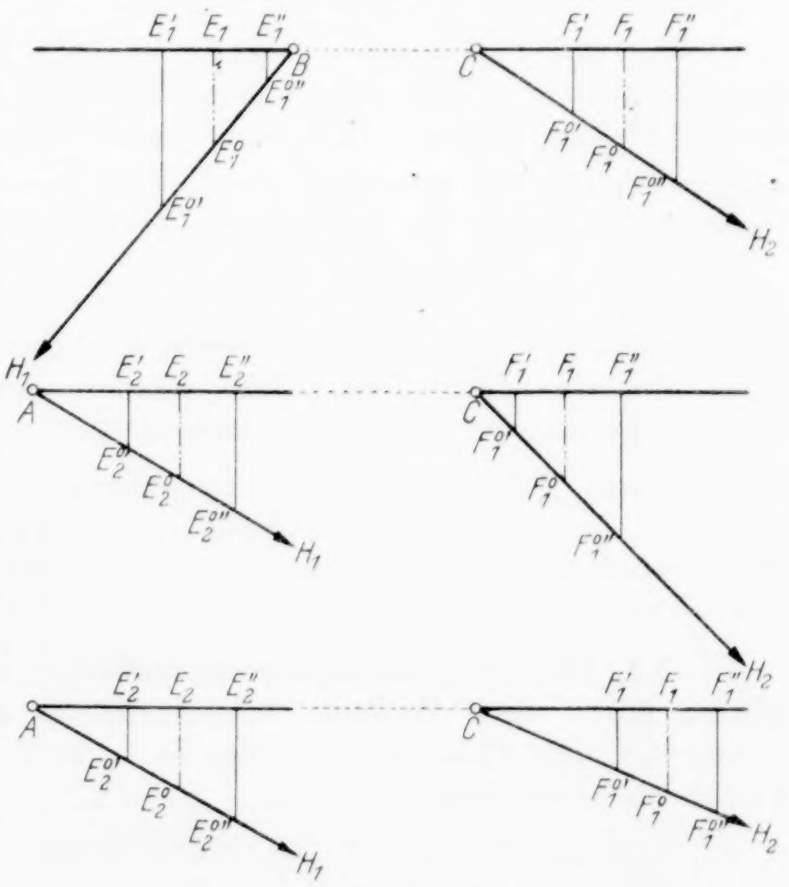


Abb. 25, Abb. 26a und 26b.

2. Fall: $E_2 F_1$. Wandert F_1 auf dem Ausleger CG_2 und E_2 auf dem Koppelträger AG_1, so ist der Extremwert für die Differenz der Inhalte der Dreiecke $E_2 E_2{}^0 A$ und $F_1 F_1{}^0 C$ zu bestimmen. Nach der gleichen Ueberlegung wie oben folgt, daß für einen Extremwert sein muß: $\bar{x} : y = u \frac{\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{a}_1} : v$ [1]). Abb. 26a und 26b zeigen jedoch, daß

[1]) $\bar{x}$ und $\bar{y}$ sollen die Abstände $A E_2$ bzw. $F_2 D$ bezeichnen.

die Art des Extremwertes von der Neigung der Linien AH und CH abhängt. Diese Neigungen sind für jeden Querschnitt anders, da sie von u und v abhängen. Abb. 24 zeigt, daß eine Neigung der Linien wie in Abb. 26a und somit ein Maximum des positiven Momentes eintritt, wenn $u\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} > v$, daß jedoch eine Neigung der Linien wie in Abb. 26b und somit ein Maximum des negativen Momentes eintritt, wenn $u\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} < v$. In ersterem Falle folgt aus $u\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} > v$, daß dann auch $\bar{x} > y$ in letzterem Falle aus $u\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} < v$, daß dann auch $\bar{x} < y$ sein muß. Der Wendepunkt tritt ein bei $u\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} = v$ oder $\bar{x} = y$, d. h. wenn $s = AC$.

Satz XVII: Wandert das eine Ende des Lastenzuges E_2F_1 auf dem Koppelträger $\mathfrak{f}_1$, das andere Ende auf dem Ausleger $\mathfrak{a}_2$ der anderen Seite, so tritt stets an demjenigen Querschnitt zwischen B und C ein Extremwert des Momentes ein, für den $\bar{x} : y = u\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} : v$. Diese Extremwerte sind maximale positive Momente, wenn $\underbrace{EF}_{s} < AC$, dagegen maximale negative Momente, wenn $s > AC$ [1]).

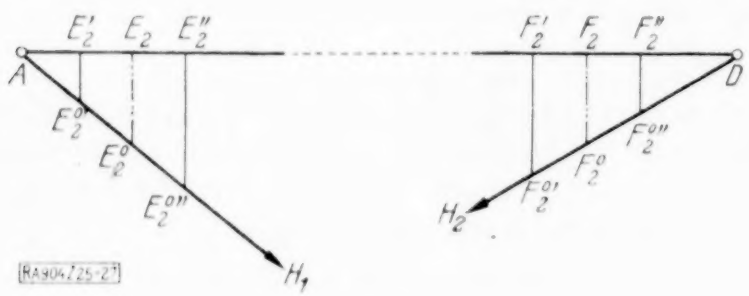


Abb. 27.

3. Fall: E_2F_2. Hier gilt nach einer analogen Ueberlegung an Hand von Abb. 27:

Satz XVIII: Wandern die beiden Enden des Lastenzuges über den an den Auslegerbalken anschließenden Koppelträgern, so treten negative Maximalmomente auf, wenn

$$\bar{x} : \bar{y} = u\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} : v\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{a}_2}$$ [2]).

Ist der Lastenzug $s > G_1D$, sowie $s > AG_2$, so gibt es zu jedem Querschnitt eine ihm nach Satz XVIII zugeordnete Stellung des Lastenzuges für die E sowie F auf den Koppelträgern liegen. Gilt eine dieser Ungleichungen nicht, so kann man Satz XVIII nur anwenden bis entweder $\bar{x} = \mathfrak{f}_1$ oder $\bar{y} = \mathfrak{f}_2$; d. h. nur für Quersehnitte zwischen einem Querschnitt $Q(\mathfrak{f}_1)$ bis zu einem Querschnitt $Q(\mathfrak{f}_2)$, wenn für $Q(\mathfrak{f}_1)$ die Gleichung gilt $\frac{u}{v} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{a}_2 \cdot (G_1D - s)}$ und für $Q(\mathfrak{f}_2)\,\frac{v}{u} = \frac{\mathfrak{a}_2\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1 \cdot (AG_2 - s)}$. Für die restlichen Querschnitte zwischen $Q(\mathfrak{f}_2)$ und B, bzw. zwischen $Q(\mathfrak{f}_1)$ und C gilt dann Satz XVII.

Positive Maximalmomente werden, während sich die Enden des Lastenzuges auf den Koppelträgern bewegen, nicht erreicht, dagegen gilt

Satz XIX: Ist der Lastenzug $s > G_1G_2$, und gleichzeitig $s > AC$, bzw. $s > BD$, so wird an einem Querschnitt zwischen B und C das positive Maximalmoment dann eintreten, wenn der Balken von A bis C, bzw. von B bis D mit Last bedeckt ist.

12. Die Maximalmomentenfläche zwischen den Mittelstützen B und C für einen über den Balken wandernden gleichmäßigen stetigen Lastenzug. Entsprechend den Fallunterscheidungen 1, 2, 3 im vorigen Abschnitt sind 3 Konstruktionsverfahren abzuleiten.

Erstes Konstruktionsverfahren: $(F_1\,F_1)$.

Wandern E und F zwischen B und C, so stimmen alle Verhältnisse mit den Verhältnissen für den einfachen Balken überein. Aber auch, wenn E und F nicht mehr zwischen B und C, jedoch noch innerhalb von G_1 und G_2 wandern, bewegen sich die

[1]) Man beachte, daß sich die Lage des zugeordneten Querschnittes bei der Erzeugung von positiven Maximalmomenten in derselben, bei der Erzeugung von negativen Maximalmomenten in entgegengesetzter Richtung wie der Balken verschiebt.

[2]) Man beachte, daß sich die Lage des zugeordneten Querschnittes entgegengesetzt der Verschiebung des Lastenzuges ändert

über B und C liegenden Punkte $\bar{B}$ und $\bar{C}$ noch auf den äußersten Parabeltangenten, d. h. auf den freien Seilstrahlen ihrer Seilparabeln, nur mit dem Unterschiede, daß die Punkte B und C jetzt auf den rückwärtigen Verlängerungen dieser freien Seilstrahlen wandern. (Vergl. Abb. 17 mit Abb. 28). Die freien Seilstrahlen sind in beiden Fällen die Be-

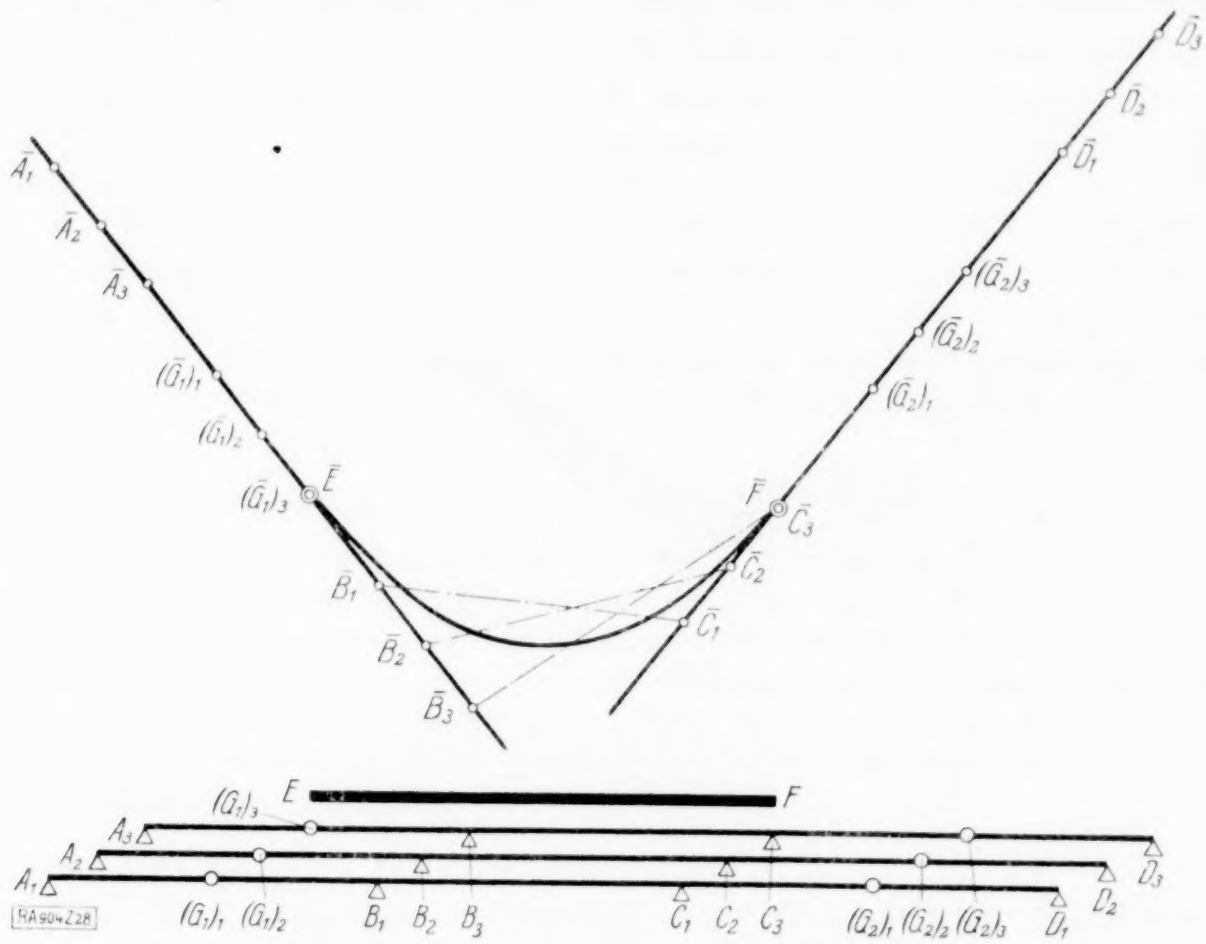


Abb. 28.

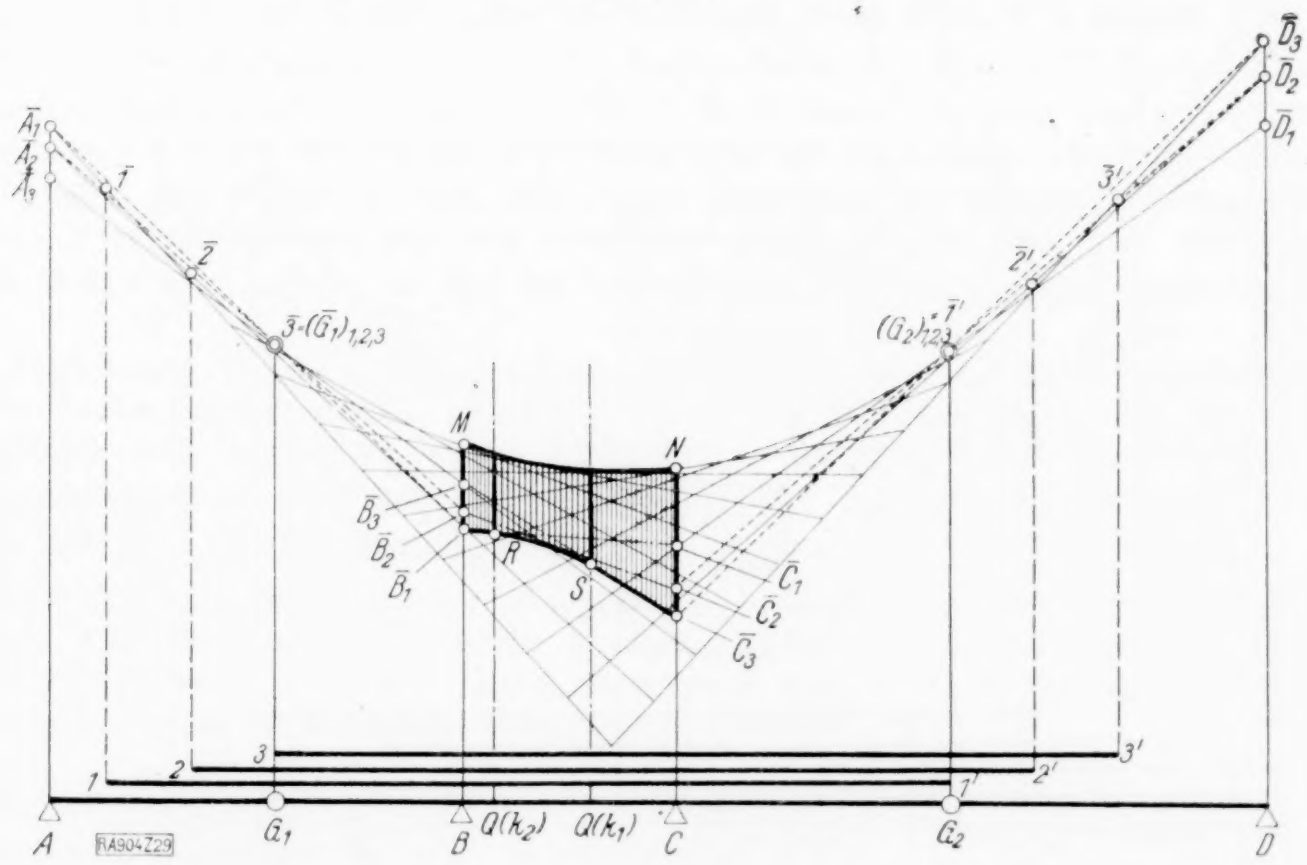


Abb. 29.

stimmungstangenten der Schlußlinienparabeln. Es läßt sich daher die in Abschnitt 6 (Satz IX) entwickelte Methode anwenden, die sich hier sogar besonders einfach gestaltet, da die Bestimmungstangenten mit den letzten Seilstrahlen übereinstimmen. Es ist also keine äußere Teilung von BC, noch das Einführen von negativen Hilfskräften notwendig. Es gilt:

Satz XX: Die positive Maximalmomentenfläche eines Auslegerbalkens zwischen den Mittelstützen B und C unter einem Lastenzuge vom Gewicht K und der Länge s stimmt — solange sich der Lastenzug zwischen G_1 und G_2 bewegt — überein mit der Momentenfläche einer gleichmäßig kontinuierlich über den Balken BC verteilten Last von der Größe $\left(2K - s\frac{K}{l}\right)$.

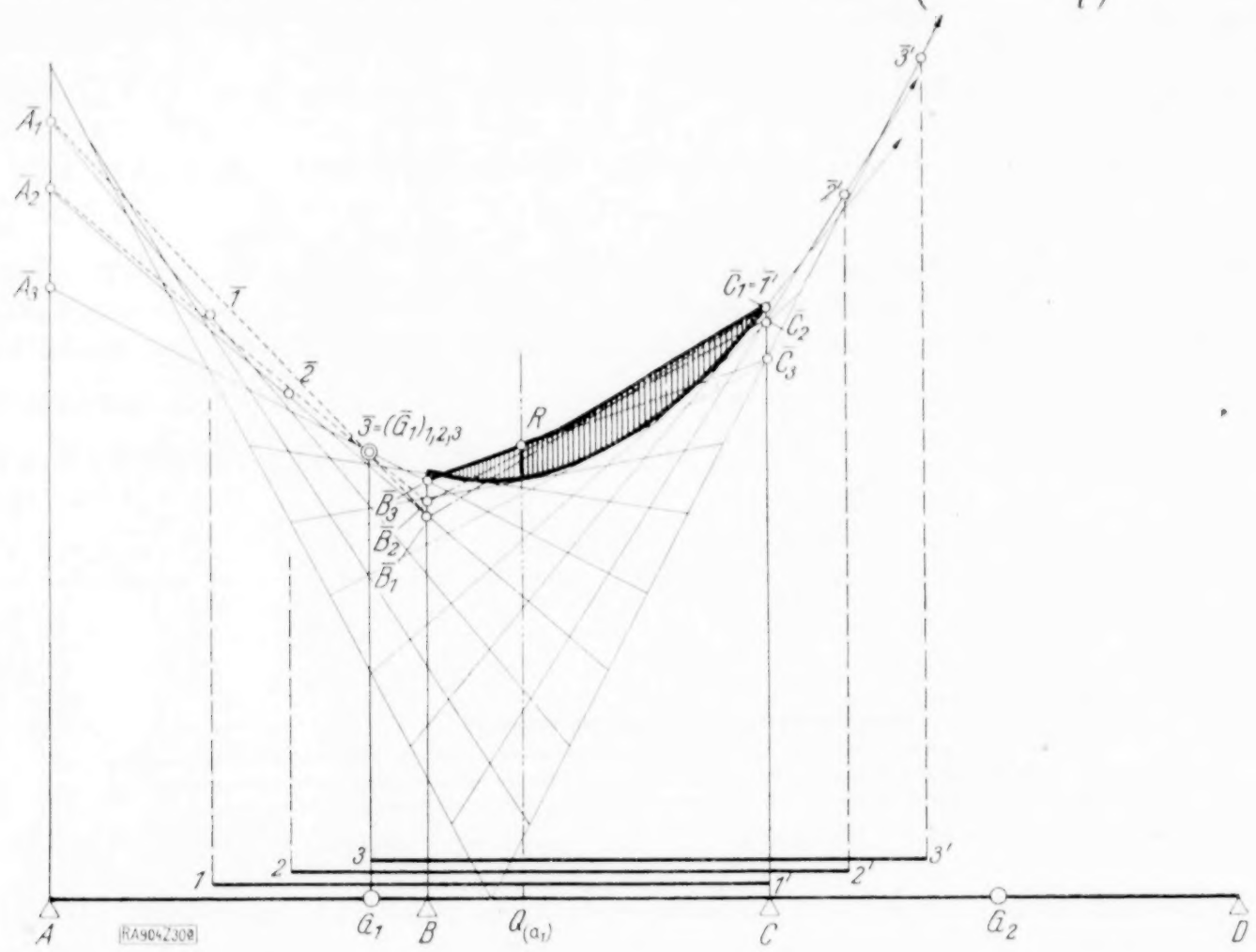


Abb. 30 a.

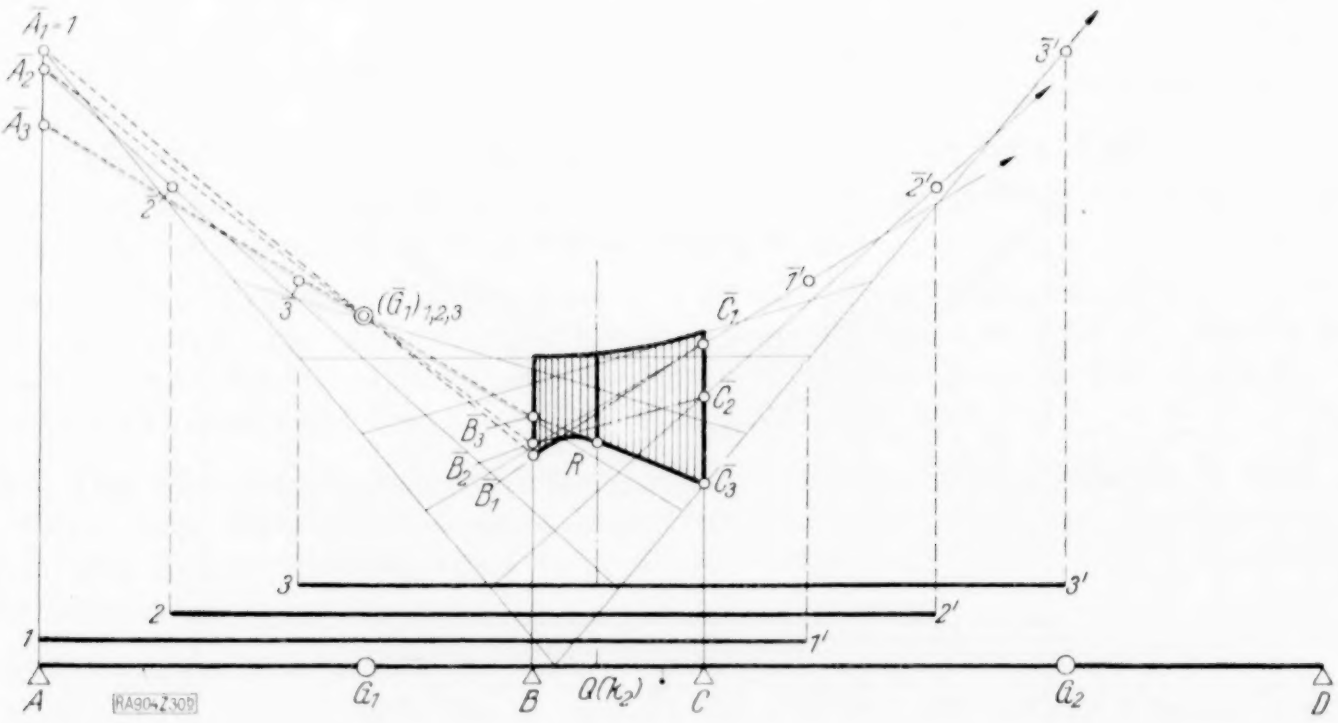


Abb. 30 b.

Zu beachten ist nur noch, daß die so gewonnene Fläche nur von $Q(a_1)$ bis zu dem Querschnitte $Q(a_2)$ wirklich Maximalmomentenfläche ist.

Zweites Konstruktionsverfahren: $(E_2\, F_2)$.

E und F wandern je auf einem Koppelträger. Man zeichnet (Abb. 29) aus ihren Tangenten — da man diese zur weiteren Konstruktion noch braucht — eine Parabel,

deren Krümmung der zu untersuchenden stetigen Last entspricht, die man aber nach beiden Seiten ohne Rücksicht auf die Länge des Lastenzuges verlängert. Nunmehr denkt man sich den Lastenzug EF über den Balken geschoben. Man beginnt in dem Augenblick, in dem zuerst beide Enden des Lastenzuges sich auf den Koppelträgern befinden. Der Lastenzug erstreckt sich also jetzt zwischen den Senkrechten durch die Punkte $\bar{1}$ und $\bar{1}'$. Da die Vertikalen durch A und D die Seilparabel nicht mehr zwischen $\bar{1}$ und $\bar{1}'$ treffen, so liegen die zugeordneten Punkte $\bar{A}_1$ und $\bar{D}_1$ auf den Tangenten an die Parabel in $\bar{1}$ und $\bar{1}'$. Die über $(G_1)_1$ und $(G_2)_1$ liegenden Punkte $(\bar{G}_1)_1$ und $(\bar{G}_2)_1$ der Koppelträgerschlußlinie liegen dagegen auf der Seilparabel selbst. Rückt der Lastenzug nun weiter bis zu der Stelle zwischen zwei Vertikalen durch $\bar{2}$ und $\bar{2}'$, so sind nach der gleichen Betrachtung die über A und D liegenden charakteristischen Punkte $\bar{A}_2$ und $\bar{D}_2$ der Schlußlinien auf den Tangenten an die Parabel in den Punkten $\bar{2}$ und $\bar{2}'$ zu suchen; die über den Gelenken liegenden Punkte sind dagegen dieselben geblieben. Das Gleiche gilt für die Stellung $\bar{3}$ $\bar{3}'$, sowie — wenn eine größere Genauigkeit gewünscht wird — für alle beliebigen Zwischenlagen.

Die Verbindungslinien $\bar{A}\bar{G}_1$ schneiden auf der Vertikalen durch B die Punkte $\bar{B}$, die Verbindungslinien $\bar{D}\bar{G}_2$ auf der Vertikalen durch C die Punkte $\bar{C}$ aus. Die Verbindungslinien entsprechender $\bar{B}$ und $\bar{C}$ hüllen zwischen den Vertikalen durch $Q(\mathfrak{f}_1)$ und $Q(\mathfrak{f}_2)$ eine Kurve RS ein, die zusammen mit dem darüberliegenden Stück des Parabelbogens MN die Maximalmomentenfläche während der Wanderung des Balkens von der Stellung $\bar{1}$ $\bar{1}'$ bis zu der Stellung $\bar{3}$ $\bar{3}'$ begrenzt[1]). Die Krümmung der Kurve RS gegen das Parabelstück MN ist konvex. Sie begrenzt also, wie vorauszusehen war, eine Fläche der negativen Marimalmomentenfläche.

Drittes Konstruktionsverfahren: $(E_2\, F_1)$.

Ein Ende des Lastenzuges wandert auf einem Koppelträger, das andere Ende auf dem Ausleger der anderen Seite.

Der Gedanke der Konstruktion ist in diesem Falle (Abb. 30a und b) derselbe wie in Abb. 29. Es vereinfacht sich nur die Konstruktion der Punkte $\bar{C}$, da das Ende F des Lastenzuges jetzt zwischen C und G_2 liegt, d. h. $\bar{D}$, sowie $\bar{G}_2$ stets beide auf dem letzten Seilstrahl, also hier auf den letzten Parabeltangenten für die einzelnen Stellungen des Lastenzuges liegen. Die Punkte $\bar{C}$ sind also weiter nichts als die Schnitte der rückwärts verlängerten Parabeltangenten mit den Vertikalen durch C. In Abb. 30a wurde der Fall gewählt, daß $\underbrace{EF}_{s} < AC$ ist, so daß die Schlußlinien $\bar{B}\bar{C}$ eine positive Maximalmomentenfläche begrenzen, in Abb. 30b dagegen ist $s > AC$, so daß eine negative Maximalmomentenfläche erzeugt wird. Die Berührungspunkte der Schlußlinien BC mit der Grenzkurve findet man nach Satz XVII. Insbesondere ist R in beiden Zeichnungen der Berührungspunkt von $\bar{B}_3\bar{C}_3$. Der Berührungspunkt von $\bar{B}_1\bar{C}_1$ ist in Abb. 30a $\bar{C}_1$, dagegen in Abb. 30b $\bar{B}_1$. (Vergl. Anm. 1, S. 148).

In Abb. 30a ist das über $Q(\mathfrak{a}_1)\,C$ liegende Flächenstück die Fortsetzung einer nach Satz XVI konstruierten positiven Momentenfläche; in Abb. 30b ist das über $BQ(\mathfrak{f}_2)$ liegende Flächenstück die Fortsetzung einer nach dem in Abb. 29 angegebenen Schema gezeichneten negativen Maximalmomentenfläche. 904

[1]) Es sei daran erinnert, daß bei geeigneter Länge des Lastenzuges die $Q(\mathfrak{f}_1)$ bzw. $Q(\mathfrak{f}_2)$ auch mit B und C zusammenfallen können.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung.

Von **R. v. MISES** und **H. POLLACZEK-GEIRINGER** in Berlin.

[Fortsetzung und Schluß von Heft 1 (1929), S. 77.]

5. Homogenes System linearer Gleichungen. Kleinster Eigenwert. Das homogene Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}\lambda - 1)x_1 + a_{12}\lambda x_2 \quad &+ \ldots + a_{1n}\lambda x_n = 0 \\ a_{21}\lambda x_1 + (a_{22}\lambda - 1)x_2 &+ \ldots + a_{2n}\lambda x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\

kritische Drehgeschwindigkeit) verwendeten Verfahren von L. Vianello. Der Konvergenzbeweis gelingt analog dem Beweise, den J. J. Koch[1]) kürzlich für die Anwendung des Vianelloschen Verfahrens auf Randwertprobleme gegeben hat. Hierzu ist eine Reihe von Eigenschaften der λ und $\mathfrak{x}$ zu entwickeln.

Da die $a_{i\,x}$ voraussetzungsgemäß symmetrisch sind, gilt, wie man leicht nachrechnet, für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ . . . die Beziehung:

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{x}_2 = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{x}_1 ,$$

die besagt, daß das skalare Produkt von $\mathfrak{x}_1$ in die Transformierte von $\mathfrak{x}_2$ gleich ist dem skalaren Produkt des Vektors $\mathfrak{x}_2$ in die Transformierte von $\mathfrak{x}_1$. Daraus aber folgt sogleich die sogenannte Orthogonalitätseigenschaft für die zu verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 gehörigen Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$. Wir haben nach (2)

$$\mathfrak{x}_1 = \lambda_1\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_1 , \qquad \mathfrak{x}_2 = \lambda_2\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_2 .$$

Multipliziert man die erste Gleichung skalar mit $\mathfrak{x}_2 : \lambda_2$, die zweite mit $\mathfrak{x}_1 : \lambda_1$, so erhält man durch Subtraktion:

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2 = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{x}_2 - (\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{x}_1 = 0 ,$$

und da $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so folgt $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2 = 0$, d. h. zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenlösungen von (1) stehen aufeinander orthogonal. Gehören aber zu einem und demselben Eigenwert λ_i zwei (oder mehr) voneinander verschiedene Eigenlösungen , so ist auch jede lineare Kombination dieser beiden Vektoren, also jeder Vektor der von den beiden Eigenlösungen »ausgespannten« Hyperebene eine Eigenlösung. In dieser Ebene können wir in vielfacher Art zwei solche Vektoren wählen, die aufeinander senkrecht stehen; andererseits stehen sie nach dem früheren gewiß auf allen Vektoren senkrecht, die zu anderen Eigenwerten gehören. Wir können auf diese Weise ein System von Eigenfunktionen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$ angeben, die paarweise aufeinander orthogonal stehen und deren jede zu einem der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ gehört; in dieser Reihe ist jeder Eigenwert so oft angeschrieben, als es seiner Vielfachheit entspricht.

Denkt man sich diese $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_n$ gefunden, so kann man ihre n zueinander normalen Richtungen als ein Koordinatenkreuz im n-dimensionalen Raume benutzen. Für den in (3) eingeführten Vektor $\mathfrak{z}^{(1)}$, den ersten der Vektoren der unendlichen Folge $\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots$ schreiben wir:

$$\mathfrak{z}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathfrak{x}_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wobei c_i mit der Länge von $\mathfrak{x}_i$ multipliziert, die i-te Komponente von $\mathfrak{z}^{(1)}$ bedeutet. Man kann die c_i selbst im verallgemeinerten Sinne als »Komponenten« von $\mathfrak{z}^{(1)}$ in bezug auf das System $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$ bezeichnen. Es folgt dann aus (3) und (2)

$$\mathfrak{z}^{(2)} = \mu^{(1)}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{z}^{(1)} = \mu^{(1)}\,\mathfrak{A}\,(c_1\,\mathfrak{x}_1 + c_2\,\mathfrak{x}_2 + \ldots + c_n\,\mathfrak{x}_n) = \mu^{(1)}\left(\frac{c_1\,\mathfrak{x}_1}{\lambda_1} + \frac{c_2\,\mathfrak{x}_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{c_n\,\mathfrak{x}_n}{\lambda_n}\right) \quad (5).$$

Die verallgemeinerten Komponenten von $\mathfrak{z}^{(2)}$ in bezug auf das Hauptachsensystem sind also das $\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_1}$, $\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_2}$, . . . $\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_n}$-fache der Komponenten von $\mathfrak{z}^{(1)}$. Die Komponenten von $\mathfrak{z}^{(3)}$ erhält man daher analog, wenn man die von $\mathfrak{z}^{(2)}$ mit $\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_1}$, $\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_2}$, . . . $\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_n}$ multipliziert, usf.

---

[1]) J. J. Koch, »Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnellaufender Wellen«. Verh. des 2. int. Kongr. f. techn. Mech., Zürich 1926, S. 213. — Der Kernpunkt des Beweises findet sich, ebenso wie das Lösungsverfahren selbst, für den Spezialfall der Fachwerkschwingungen schon bei E. Pohlhausen (diese Zeitschr. 1921, S. 28—42). Andererseits ist die Pohlhausensche Aufgabe allgemeiner als die von uns behandelte. Sie besteht in der Aufsuchung der Eigenwerte und Eigenlösungen eines Systems (a) $\mathfrak{B}\,\mathfrak{x} = \lambda\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}$, das zwei definite quadratische Formen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthält. Die von Hrn. Pohlhausen angegebene Lösung erfordert bei jedem einzelnen Schritt die explicite Auflösung eines Systems von n Gleichungen mit der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{B}$. In seinem Spezialfall läßt sich diese Aufgabe verhältnismäßig einfach graphisch erledigen. Im allgemeinen wird bei Vorliegen des Problems (a) dem im Text angegebenen Lösungsverfahren eine Behandlung des Gleichungssystems $\mathfrak{B}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ mit beliebigem $\mathfrak{y}$ nach Abschnitt 3 vorauszugehen haben. — Ueber den Zusammenhang der in der technischen Mechanik auftretenden Randwertprobleme mit der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen bzw. mit der Theorie der Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen vergl. E. Trefftz, diese Zeitschr., Bd. 3 (1923), S. 272 ff. sowie van den Dungen, Comptes rendus, Paris t. 177 in mehreren Abhandlungen.

Schließlich wird

$$\mathfrak{z}^{(\nu+1)} = \mu^{(1)} \ldots \mu^{(\nu)} \cdot \left[\frac{c_1}{\lambda_1{}^\nu} \cdot \mathfrak{x}_1 + \frac{c_2}{\lambda_2{}^\nu} \mathfrak{x}_2 + \ldots + \frac{c_n}{\lambda_n{}^\nu} \mathfrak{x}_n \right]$$

$$= \frac{\mu^{(1)} \ldots \mu^{(\nu)}}{\lambda_1{}^\nu} \cdot \left[c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^\nu + \ldots + c_n \mathfrak{x}_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^\nu \right] \quad \ldots \quad (6).$$

Sind nun, was wir vorläufig voraussetzen, $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ alle dem Betrage nach größer als λ_1 (d. h. λ_1 ein einfacher Eigenwert und $-\lambda_1$ kein Eigenwert), so verschwinden für unbegrenzt wachsendes ν alle Glieder bis auf das erste in der Klammer und es entsteht durch Vergleich der Formeln für $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ und $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$

$$\mathfrak{z}^{(\nu+1)} \to \frac{\mu^{(\nu)}}{\lambda_1} \mathfrak{z}^{(\nu)} \quad \text{für} \quad \nu \to \infty \quad \ldots \quad (7).$$

Unser Verfahren führt also, genügend weit fortgesetzt, zu zwei Zahlengruppen $z_1{}^{(\nu)}, \ldots z_n{}^{(\nu)}$ und $z_1{}^{(\nu+1)}, \ldots z_n{}^{(\nu+1)}$, die sich nur um einen Faktor unterscheiden. Jede von ihnen kann als Lösung von (1) bzw. (2) angesehen werden, und der zugehörige λ-Wert ergibt sich aus:

$$\lambda_1 = \lim_{\nu \to \infty} \mu^{(\nu)} \frac{z_1{}^{(\nu)}}{z_1{}^{(\nu+1)}} = \lim_{\nu \to \infty} \mu^{(\nu)} \frac{z_2{}^{(\nu)}}{z_2{}^{(\nu+1)}} = \ldots = \lim_{\nu \to \infty} \mu^{(\nu)} \frac{z_n{}^{(\nu)}}{z_n{}^{(\nu+1)}} \quad \ldots \quad (7').$$

Für die praktische Ausführung wird man die μ etwa als dekadische Einheiten wählen. Welche Einheit man verwendet, das ergibt sich von selbst, wenn man z. B. verlangt, daß die ersten Komponenten $z_1{}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ stets von gleicher Größenordnung bleiben.

Ist λ_1 ein mehrfacher, z. B. ein zweifacher Eigenwert $(\lambda_1 = \lambda_2)$, zu dem also zwei verschiedene Eigenlösungen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ gehören, so ändert sich im Beweisgang zunächst nichts wesentliches. An Stelle von (6) tritt die Gleichung

$$\mathfrak{z}^{(\nu+1)} = \frac{\mu^{(1)} \ldots \mu^{(\nu)}}{\lambda_1{}^\nu} \cdot \left[(c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2) + c_3 \mathfrak{x}_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^\nu + \ldots + c_n \mathfrak{x}_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^\nu \right] \quad \ldots \quad (6'),$$

und daraus folgt auf dieselbe Weise wie oben die Beziehung (7) zur Bestimmung von λ_1. Um auch die beiden zugehörigen Eigenlösungen zu bestimmen, braucht man außer der einen Kombination $c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2$, die sich bei der Wahl von $\mathfrak{z}^{(1)}$ als Ausgangsvektor der Iteration ergibt, noch eine zweite. Geht man daher von einem $\mathfrak{z}_1{}^{(1)}$ aus, das kein Vielfaches von $\mathfrak{z}^{(1)}$ ist, so erhält man als Ergebnis der Iteration im allgemeinen eine andere lineare Zusammenfassung $c_1' \mathfrak{x}_1 + c_2' \mathfrak{x}_2$ der Eigenlösungen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Durch die linearen Kombinationen der beiden gefundenen wird die Gesamtheit der zu λ_1 gehörigen Eigenlösungen dargestellt.

Der Fall, daß neben λ_1 auch $-\lambda_1$ ein Eigenwert ist, läßt sich auf diese Weise nicht erledigen. Wir sprechen indes den folgenden Satz aus, der, von diesem Fall abgesehen, die Berechnung des absolut kleinsten Eigenwertes und der zugehörigen Eigenlösungen festlegt.

Satz 11. Für ein homogenes lineares Gleichungssystem der Form (1) mit Parameter λ, das kurz geschrieben,

$$\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{A} \mathfrak{x} \qquad (a_{\iota\varkappa} = a_{\varkappa\iota}) \quad \ldots \quad (a)$$

lautet, können der kleinste Eigenwert und die zugehörigen Eigenlösungen gefunden werden, indem man, ausgehend von einem willkürlichen Vektor $\mathfrak{z}^{(1)}$, mit geeigneten Beiwerten $\mu^{(\nu)}$ eine Iteration

$$\mathfrak{z}^{(\nu+1)} = \mu^{(\nu)} \mathfrak{A} \mathfrak{z}^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots) \quad \ldots \quad (b)$$

ansetzt. Fährt man solange fort, bis $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ annähernd parallel $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ ist, so liefert das Verhältnis der Komponenten von $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ zu den Komponenten von $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ den Wert λ_1; die gemeinsame Richtung von $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ und $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ ist eine zugehörige Eigenlösung. Besteht die Vermutung, daß λ_1 ein mehrfacher (r-facher) Eigenwert ist, so ist die Iteration (b) nochmals mit einem anderen Ausgangsvektor $\mathfrak{z}_1{}^{(1)}$ und $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \ldots = \lambda_1$ durchzuführen; diese ergibt als limes-Vektor eine etwa vorhandene weitere zu λ_1 gehörige Eigenlösung, usf. Auf diese Weise ergeben sich so viele zu λ_1 gehörige verschiedene Eigenlösungen, als der Vielfachheit r von λ_1 entspricht. Durch diese r Vektoren wird die r-fach unendliche Mannigfaltigkeit der sämtlichen zu λ_1 gehörigen Eigenlösungen ausgespannt. Das Verfahren konvergiert immer, wenn nicht der absolut kleinste Eigenwert λ_1 mit positivem und negativem Vorzeichen auftritt.

Als Beispiel wählen wir die Behandlung eines Randwertproblems einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung nach dem Ritzschen Verfahren: die homogene selbstadjungierte Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda k(x)\,y(x)=0; \qquad y(a)=y(b)=0$$

führt nach dem Gedankengang von Ritz, bei dem Ansatz

$$y(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots=c_n\varphi_n(x); \qquad \varphi_i(a)=\varphi_i(b)=0; \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

auf n Gleichungen für die Koeffizienten $c_\varkappa$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(\beta_{\iota\varkappa}-\lambda\alpha_{\iota\varkappa})c_\varkappa=0; \qquad (\iota=1,2,\ldots n)$$

$$\beta_{\iota\varkappa}=\beta_{\varkappa\iota}=\int_a^b p(x)\frac{d\varphi_\varkappa}{dx}\frac{d\varphi_\iota}{dx}dx, \qquad \alpha_{\iota\varkappa}=\alpha_{\varkappa\iota}=\int_a^b k(x)\,\varphi_\varkappa(x)\,\varphi_\iota(x)\,dx.$$

Wir setzen voraus, daß die φ_ι so gewählt sind, daß $\beta_{\iota\varkappa}=0$ für $\iota\neq\varkappa$. Dagegen ist es nicht erforderlich, die $\varphi_\varkappa(x)$ so zu normieren, daß $\beta_{\varkappa\varkappa}=1$ wird.

Sei zum Beispiel $p(x)=1$, $k(x)=x^2$, $a=0$, $b=2\pi$ und $\varphi_\varkappa(x)=\sin\varkappa x$ gewählt. Da $k(x)$ sein Zeichen nicht wechselt, sind bekanntlich alle Eigenwerte positiv, so daß entgegengesetzt gleiche Eigenwerte ausgeschlossen sind.

Man findet durch partielle Integration:

$$\alpha_{\iota\varkappa}=2\pi\cdot\frac{4\iota\varkappa}{(\iota^2-\varkappa^2)^2} \quad (\iota\neq\varkappa); \qquad \alpha_{\varkappa\varkappa}=\frac{8\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2\varkappa^2}$$

und

$$\beta_{\iota\varkappa}=0 \quad (\iota\neq\varkappa); \qquad \beta_{\varkappa\varkappa}=\varkappa^2\pi.$$

Wir erläutern hier das Verfahren der Kürze halber an dem Näherungsgrade $n=4$ und erhalten, wenn x_ι für die unbekannten Koeffizienten c_ι gesetzt wird, die Gleichungen:

$$x_1=\lambda\left[\left(\frac{8\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\right)x_1+\frac{16}{9}x_2+\frac{3}{8}x_3+\frac{32}{225}x_4\right]$$

$$4x_2=\lambda\left[\frac{16}{9}x_1+\left(\frac{8\pi^2}{3}-\frac{1}{8}\right)x_2+\frac{48}{25}x_3+\frac{4}{9}x_4\right]$$

$$9x_3=\lambda\left[\frac{3}{8}x_1+\frac{48}{25}x_2+\left(\frac{8\pi^2}{3}-\frac{1}{18}\right)x_3+\frac{96}{49}x_4\right]$$

$$16x_4=\lambda\left[\frac{32}{225}x_1+\frac{4}{9}x_2+\frac{96}{49}x_3+\left(\frac{8\pi^2}{3}-\frac{1}{32}\right)x_4\right]$$

Dividiert man die erste dieser Gleichungen durch $\alpha=\frac{8\pi^2}{3}-\frac{1}{2}=25{,}81904$ die zweite durch 4α, die dritte durch 9α, die vierte durch 16α, so erhält man das System

$$x_1=\alpha\lambda\,[1\cdot\quad x_1+0{,}068856\,x_2+0{,}014524\,x_3+0{,}005508\,x_4]$$
$$x_2=\alpha\lambda\,[0{,}017214\,x_1+0{,}253631\,x_2+0{,}018591\,x_3+0{,}004303\,x_4]$$
$$x_3=\alpha\lambda\,[0{,}001614\,x_1+0{,}008263\,x_2+0{,}113024\,x_3+0{,}008431\,x_4]$$
$$x_4=\alpha\lambda\,[0{,}000344\,x_1+0{,}001076\,x_2+0{,}004743\,x_3+0{,}045094\,x_4].$$

Wir wählen als Ausgangsvektor $\mathfrak{z}^{(1)}$ den Einheitsvektor mit den Komponenten 1,0, 0,0 und setzen die Beiwerte $\mu^{(1)}=\mu^{(2)}=\ldots=\frac{1}{\alpha}$. Dann ergeben sich die Komponenten der Iterationsvektoren.

Index der Näherung	z_1	z_2	z_3	z_4
1.	1	0	0	0
2.	1	0,017214	0,001614	0,000344
3.	1,001210	0,021611	0,001941	0,000387
4.	1,002728	0,022754	0,002017	0,000393
5.	1,004326	0,023071	0,002037	0,000397
6.	1,005947	0,023180	0,002045	0,000398
7.	1,007575	0,023235	0,002050	0,000399
8.	1,009207	0,023249	0,002053	0,000400

Der Quotient der Komponenten der siebenten und achten Näherung ist 0,988 und somit

$$\lambda_1 = \frac{1}{25{,}81904} \cdot 0{,}998 = 0{,}0387.$$

Für die zugehörige Eigenlösung erhält man aus der achten Näherung:

$$y_1(x) = \text{Const.} \left[\sin x + \frac{0{,}023249}{1{,}009207} \sin 2x + \frac{0{,}002053}{1{,}009207} \sin 3x + \frac{0{,}006400}{1{,}009207} \sin 4x \right]$$
$$= \text{Const.} \, (\sin x + 0{,}023037 \sin 2x + 0{,}002034 \sin 3x + 0{,}000396 \sin 4x).$$

Die bisherigen Ueberlegungen reichen für die Behandlung derjenigen Aufgaben aus, bei denen die $a_{\iota\varkappa}$ als Koeffizienten einer quadratischen Form auftreten, die nur positiver Werte fähig, also positiv definit ist und daher nur positive Eigenwerte besitzt. Das gilt, wie bekannt, für lineare Gleichungen, die aus Minimumproblemen hervorgehen, beispielsweise für die Schwingungsaufgaben und Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Wenn man die Koeffizientenmatrix nur als symmetrisch voraussetzt, so bedarf noch der Fall zweier entgegengesetzt gleicher Eigenwerte λ_1 und $\lambda_2 = -\lambda_1$ einer gesonderten Untersuchung.

Hier gestaltet sich die Iteration folgendermaßen: Nehmen wir den Index ν als gerade Zahl an, so ist, wenn alle $\mu = 1$ gesetzt sind nach (6):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}^{(\nu-1)} &= \frac{1}{{\lambda_1}^{\nu-2}} \left[c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2 + c_3 \mathfrak{x}_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{\nu-2} + \ldots \right] \\
\mathfrak{z}^{(\nu)} &= \frac{1}{{\lambda_1}^{\nu-1}} \left[c_1 \mathfrak{x}_1 - c_2 \mathfrak{x}_2 + c_3 \mathfrak{x}_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{\nu-1} + \ldots \right] \\
\mathfrak{z}^{(\nu+1)} &= \frac{1}{{\lambda_1}^{\nu}} \left[c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2 + c_3 \mathfrak{x}_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{\nu} + \ldots \right] \qquad \ldots\ldots (11). \\
\mathfrak{z}^{(\nu+2)} &= \frac{1}{{\lambda_1}^{\nu+1}} \left[c_1 \mathfrak{x}_1 - c_2 \mathfrak{x}_2 + c_3 \mathfrak{x}_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^{\nu+1} + \ldots \right]
\end{aligned}$$

Wächst ν unbegrenzt, so folgt aus der ersten und dritten dieser Gleichungen

$$\mathfrak{z}^{(\nu-1)} \to {\lambda_1}^2 \mathfrak{z}^{(\nu+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

d. h. die $(\nu-1)$-te und $(\nu+1)$-te Näherung liefern annähernd, bis auf den Zahlenfaktor ${\lambda_1}^2$, gleiche Vektoren. Wir folgern aus (11), daß

$$\lim_{\nu \to \infty} {\lambda_1}^{\nu} \mathfrak{z}^{(\nu+1)} = c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2$$

Analog ergibt die vierte Gleichung (11)

$$\lim_{\nu \to \infty} {\lambda_1}^{\nu+1} \mathfrak{z}^{(\nu+2)} = c_1 \mathfrak{x}_1 - c_2 \mathfrak{x}_2$$

Um also die Eigenlösungen zu erhalten, kann man unter Weglassung gleichgültiger Faktoren für genügend große ν

$$\mathfrak{x}_1' = \mathfrak{z}^{(\nu+1)} + \lambda_1 \mathfrak{z}^{(\nu+2)} \text{ und } \mathfrak{x}_2' = \mathfrak{z}^{(\nu+1)} - \lambda_1 \mathfrak{z}^{(\nu+2)} \quad \ldots\ldots (13)$$

bilden. Zu $\mathfrak{x}_1'$ gehört λ_1, zu $\mathfrak{x}_2'$ gehört $-\lambda_1$ als Eigenwert.

In die Augen fallend bei der Durchführung der Iteration ist hier, daß bei wachsendem ν allmählich die Näherungvektoren mit ungeradem Index untereinander und die mit geradem Index untereinander parallel werden.

Wir können somit Satz 11 durch folgende Vorschrift ergänzen:

Satz 12. Tritt der kleinste Eigenwertbetrag $|\lambda_1|$ doppelt auf, als Eigenwert mit positivem und negativem Vorzeichen, so setzt man die Iteration wie in Satz 11 an. Es werden dann bei genügend großem (geradem) Iterationsindex ν die Vektoren $\mathfrak{z}^{(\nu-1)}$ und $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ einander ähnlich und ebenso die Vektoren $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ und $\mathfrak{z}^{(\nu+2)}$. Der Betrag des Eigenwertes und die zu λ_1 bzw. $-\lambda_1$ gehörigen Eigenlösungen bestimmen sich gemäß (12) bzw. (13).

6. Höhere Eigenwerte und Eigenlösungen. Für die Ermittlung des zweiten Eigenwertes und der zugehörigen Eigenlösung nach Auffindung des ersten Eigenwertes und der zu diesem gehörigen sämtlichen Eigenfunktionen pflegt man folgendes Verfahren anzugeben. Nehmen wir an, um die Gedanken zu fixieren, der erste Eigenwert λ_1 wäre ein einfacher gewesen und $\mathfrak{x}_1$ die zugehörige Eigenlösung. Um λ_2 und $\mathfrak{x}_2$ zu finden,

subtrahiert man von einem beliebigen Vektor $\mathfrak{z}$ seine Komponente in Richtung von $\mathfrak{x}_1$, setzt also:

$$\mathfrak{z}^{(1)} = \mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_1^2} \cdot \mathfrak{x}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

(was man analog zu (8) auch ausführlicher schreiben kann). Der Vektor $\mathfrak{z}^{(1)}$ hat dann in Richtung von $\mathfrak{x}_1$ keine Komponente, es ist $\mathfrak{z}^{(1)} \cdot \mathfrak{x}_1 = 0$. Daher verschwindet für $\mathfrak{z}^{(1)}$ bei der zu (4) analogen Darstellung der erste Koeffizient und es gilt der Ansatz:

$$\mathfrak{z}^{(1)} = a_2 \mathfrak{x}_2 + a_3 \mathfrak{x}_3 + \ldots + a_n \mathfrak{x}_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Iteriert man, ausgehend von einem solchen Vektor, $\mathfrak{z}^{(1)}$ genau wie früher durch (3') — wobei hinsichtlich der Wahl der Beiwerte das dort Gesagte beachtet werden kann —, so ergibt sich für den iterierten Vektor ganz analog zu (6) die Beziehung:

$$\mathfrak{z}^{(\nu+1)} \to \frac{\mu^{(\nu)}}{\lambda_2} \mathfrak{z}^{(\nu)} \quad \text{für} \quad \nu \to \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

War etwa λ_1 ein zweifacher Eigenwert, zu dem zwei zugehörige, linear unabhängige Eigenfunktionen bereits ermittelt sind, so muß man von einem willkürlichen Vektor $\mathfrak{z}$ seine Komponenten nach Richtung dieser beiden Eigenlösungen subtrahieren und den Differenzvektor als Ausgangsvektor der Iteration (3') wählen.

Ebenso ermittelt man, falls etwa λ_1 und λ_2 einfache Eigenwerte sind, den dritten Eigenwert λ_3 und seine zugehörige Eigenlösung $\mathfrak{x}_3$, indem man von einem Vektor $\mathfrak{z}^{(1)}$:

$$\mathfrak{z}^{(1)} = \mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_1^2} \cdot \mathfrak{x}_1 - \frac{\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_2^2} \cdot \mathfrak{x}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

ausgeht, usf. Kurz, man hat immer, ob nun einfache oder mehrfache Eigenwerte vorhanden sind, einen solchen Ausgangsvektor zu wählen, der auf allen früher ermittelten Eigenlösungen, die zu kleineren Eigenwerten gehören, senkrecht steht. Dann wird man durch die Iteration (3) stets auf einen neuen Eigenwert und eine zugehörige Eigenlösung geführt.

Allein für die wirkliche Rechnung ist diese Vorschrift ziemlich wertlos. Denn es ist in der Regel unmöglich, einen Ausgangsvektor $\mathfrak{z}^{(1)}$ so zu wählen, daß seine Komponente in Richtung der ersten Eigenlösung exakt verschwindet, wenn man diese Eigenlösung nur durch ein Näherungsverfahren gefunden hat. Wenn aber diese Komponente nicht restlos getilgt ist, so fällt man in Verfolgung der Iteration immer wieder auf die erste Eigenlösung zurück, wie das folgende einfache Beispiel zeigt. Die Lösung von $x_1 = \lambda(2x_1 + x_2)$; $x_2 = \lambda x_1$ kann man sogleich angeben: es ist $\lambda_1 = \sqrt{2} - 1$, $\lambda_2 = -(\sqrt{2} + 1)$, $\mathfrak{x}_1 = 1, (\sqrt{2} - 1)$; $\mathfrak{x}_2 = 1, -(\sqrt{2} + 1)$.

Versucht man, die zweite Eigenlösung nach dem oben dargelegten Verfahren zu bestimmen und setzt für den Ausgangsvektor $\mathfrak{z}^{(1)}$ der Iteration geradezu 1, $-2{,}414$, also die schon auf vier Stellen richtige zweite Eigenlösung ein, so erhält man mit $\mu^{(\nu)} = 1$ die folgenden Zahlen für $z_1^{(\nu)}$ und $z_2^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots 11)$:

1	$-0{,}414$	0,172	$-0{,}070$	32	— 6	20	34	88	210	498
$-2{,}414$	1,000	$-0{,}414$	0,172	-70	32	— 6	20	34	88	210

Man sieht, wie diese Zahlenfolge gegen die erste Eigenlösung mit dem Komponenten-Verhältnis $1 : 0{,}414$ konvergiert. Wie viele Stellen der ersten Eigenlösung man auch bei Wahl des Ausgangsvektors berücksichtigen mag, stets wird sich ein ähnlicher Verlauf ergeben[1]).

Ein brauchbares Verfahren zur Aufsuchung der zweiten Eigenlösung ist folgendes. Es wird genügen, den Fall zu betrachten, daß die beiden absolut kleinsten Eigenwerte λ_1 und λ_2 einfache sind, und nicht auch gleichzeitig $-\lambda_1$ oder $-\lambda_2$ die Rolle eines Eigenwertes spielt. Wie man in den komplizierten Fällen den jetzt anzugebenden Gedankengang mit den früher ausgeführten Verfahren zu kombinieren hat, ist dann nicht mehr

[1]) Auf diese bei Berechnung der höheren Eigenwerte und Eigenlösungen auftretende Schwierigkeit wird auch in einer kürzlich erschienenen Arbeit hingewiesen: H. van den Dungen: »Les problèmes généraux de la technique des vibrations«. Mèmorial des sciences physiques; Fasc. IV, 1928. Dort finden sich Formeln für die Berechnung der höheren Eigenwerte, die im wesentlichen auf M. Hardamard (»La série de Taylor et son prolongement analytique«. Coll. Scientia, 2° édition 1926, Paris) zurückgehen. Die Hadamardschen Formeln beziehen sich auf Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Sie sind für die wirkliche Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen weniger geeignet als die im Text gegebenen.

schwer einzusehen. Wir schreiben unter Beibehaltung aller bisherigen Bezeichnungen Gl. (6) jetzt in der Form

$$\frac{1}{\mu^{(1)} \dots \mu^{(\nu)}} \cdot \mathfrak{z}^{(\nu+1)} = \frac{c_1}{\lambda_1{}^{\nu}} \mathfrak{x}_1 + \frac{1}{\lambda_2{}^{\nu}} \left[c_2 \mathfrak{x}_2 + c_3 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{\nu} \mathfrak{x}_3 + c_4 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4}\right)^{\nu} \mathfrak{x}_4 + \dots c_n \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^{\nu} \mathfrak{x}_n \right] \quad (14).$$

Geht man statt von $\mathfrak{z}^{(1)}$ von einem anderen Vektor $\mathfrak{z}_1{}^{(1)}$ aus, dessen Entwicklungskoeffizienten $c_1', c_2', c_3' \dots$ (an Stelle von $c_1, c_2, c_3, \dots$) lauten, so führt die Iteration zu

$$\frac{1}{\mu^{(1)} \dots \mu^{(\nu)}} \mathfrak{z}_1{}^{(\nu+1)} = \frac{c_1'}{\lambda_1{}^{\nu}} \mathfrak{x}_1 + \frac{1}{\lambda_2{}^{\nu}} \left[c_2' \mathfrak{x}_2 + c_3' \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{\nu} \mathfrak{x}_3 + c_4' \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4}\right)^{\nu} \mathfrak{x}_4 + \dots + c_n' \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^{\nu} \mathfrak{x}_n \right] \quad (14').$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Erweiterung mit c_1' bzw. c_1 und Subtraktion

$$c_1' \mathfrak{z}^{(\nu+1)} - c_1 \mathfrak{z}_1{}^{(\nu+1)} = \frac{\mu^{(1)} \dots \mu^{(\nu)}}{\lambda_2{}^{\nu}} \left[(c_1' c_2 - c_1 c_2') \mathfrak{x}_2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{\nu} (c_1' c_3 - c_1 c_3') \mathfrak{x}_3 + \dots \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^{\nu} (c_1' c_n - c_1 c_n') \mathfrak{x}_n \right].$$

Da die ν^{ten} Potenzen der Quotienten $\lambda_2 : \lambda_3$, $\lambda_2 : \lambda_4$ usw. mit wachsendem ν gegen Null gehen, so erhält man mit

$$\frac{c_1'}{c_1' c_2 - c_1 c_2'} \cdot \frac{\lambda_2^{\nu}}{\mu^{(1)} \dots \mu^{(\nu)}} = \alpha_{\nu}, \qquad \frac{c_1}{c_1' c_2 - c_1 c_2'} \cdot \frac{\lambda_2^{\nu}}{\mu^{(1)} \dots \mu^{(\nu)}} = \alpha_{\nu}'$$

für $\mathfrak{x}_2$ die Beziehung

$$\mathfrak{x}_2 = \lim_{\nu \to \infty} (\alpha_{\nu} \mathfrak{z}^{(\nu+1)} - \alpha_{\nu}' \mathfrak{z}_1{}^{(\nu+1)}) \quad \dots \dots \dots \quad (15),$$

in Worten: die zweite Eigenlösung $\mathfrak{x}_2$ erhält man bei genügend großem ν als eine bestimmte Kombination der ν^{ten} Iterierten, die aus zwei beliebigen verschiedenen Ausgangsvektoren entstanden sind. Dabei ist nur vorausgesetzt, daß nicht zugleich $c_1' = \varkappa c_1$ und $c_2' = \varkappa c_2$ ist, was im allgemeinen leicht zu erreichen sein wird. Die Koeffizienten α_{ν} und α' in (15) sind unbekannt, aber dafür kennt man die Bedingung, daß $\mathfrak{x}_2$ auf dem schon früher ermittelten $\mathfrak{x}_1$ senkrecht stehen muß. Die tatsächliche Bestimmung von $\mathfrak{x}_2$ (und von λ_2) unterliegt noch einigen numerischen Schwierigkeiten.

Zunächst sieht es so aus, als ob die Behauptung (15) einen Widerspruch gegen Satz 11 enthielte. Denn dort wurde behauptet, daß jeder Ausgangsvektor nach genügend langer Iteration auf die Richtung $\mathfrak{x}_1$ führt, so daß jede lineare Kombination von $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ und $\mathfrak{z}_1{}^{(\nu+1)}$ schließlich auch nur die Richtung $\mathfrak{x}_1$ haben könnte. Aber diese Aussage ist auf (15) nicht anwendbar, weil die Koeffizienten α_{ν} und α_{ν}' vom Index ν abhängen und ev. mit ihm ins Unendliche gehen. Tatsächlich muß man die Rechnung bis zu einem ν führen, für das die Vektoren $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$, $\mathfrak{z}_1{}^{(\nu)}$ und $\mathfrak{z}_1{}^{(\nu+1)}$ so weit parallel sind, daß ihre Richtung nach Satz 11 für $\mathfrak{x}_1$ genommen werden kann, man muß aber diese Rechnung mit einer solchen Genauigkeit durchführen, daß auch noch Unterschiede in den Richtungen von $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ und $\mathfrak{z}_1{}^{(\nu+1)}$ merklich sind. Schreiben wir jetzt vorübergehend $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ für $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ und $\mathfrak{z}_1{}^{(\nu+1)}$ und bezeichnen wir mit z und z' die Längen dieser beiden Vektoren, so haben die Vektoren

$$\mathfrak{z} \quad \text{und} \quad \frac{z}{z'} \mathfrak{z}'$$

gleiche Länge und annähernd beide die Richtung von $\mathfrak{x}_1$. Wir dürfen daher $\mathfrak{x}_1$ als parallel zum arithmetischen Mittel von $\mathfrak{z}$ und $\frac{z}{z'} \cdot \mathfrak{z}'$ annehmen, also auch parallel der Summe

$$\mathfrak{z} + \frac{z}{z'} \mathfrak{z}'.$$

Ein Vektor, der zu diesem senkrecht steht und eine lineare Kombination von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ bildet, ist

$$\mathfrak{z} - \frac{z}{z'} \mathfrak{z}' \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (16),$$

denn das skalare Produkt der beiden verschwindet:

$$(\mathfrak{z} + \frac{z}{z'} \mathfrak{z}') (\mathfrak{z} - \frac{z}{z'} \mathfrak{z}') = z^2 - \frac{z^2}{z'^2} \cdot z'^2 = 0.$$

Somit ist in (16) die zum zweitkleinsten Eigenwert λ_2 gehörige Eigenlösung der Richtung nach gefunden. Um auch λ_2 selbst zu bestimmen, bedenke man, daß für jedes Vielfache von $\mathfrak{x}_2$ die Beziehung

$$\varkappa \mathfrak{x}_2 = \lambda_2 \mathfrak{A} (\varkappa \mathfrak{x}_2)$$

gelten muß. Setzt man hier für $\varkappa\, \mathfrak{x}_2$ das z'-fache des Vektors (16) und bedenkt, daß die $\mathfrak{A}$-Operation auf $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ bzw. $\mathfrak{z}_1^{(\nu+1)}$ ausgeübt, bis auf den Faktor $1/\mu^{(\nu+1)}$ die nächste Iterierte $\mathfrak{z}^{(\nu+2)}$ bzw. $\mathfrak{z}_1^{(\nu+2)}$ ergibt, so folgt

$$\mu^{(\nu+1)} \frac{z'\,\mathfrak{z}^{(\nu+1)} - z\,\mathfrak{z}_1^{(\nu+1)}}{z'\,\mathfrak{z}^{(\nu+2)} - z\,\mathfrak{z}_1^{(\nu+2)}} \to \lambda_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

worin für $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$, $\mathfrak{z}_1^{(\nu+1)}$ usf. irgend eine Komponente der betreffenden Vektoren gesetzt werden kann. Die Schwierigkeit der Berechnung liegt hier wie auch bei (16) darin, daß in den Determinanten-Ausdrücken von der Form $z'\,\mathfrak{z} - z\,\mathfrak{z}'$ stets sehr kleine Differenzen großer Zahlen auftreten. Wir werden dies gleich an einem Beispiel zeigen und auch einen Weg zur Ueberwindung dieser Schwierigkeit angeben. Wir fassen vorerst zusammen:

Satz 13. Um den zweitkleinsten Eigenwert λ_2 und die zugehörige Eigenlösung $\mathfrak{x}_2$ zu finden, führe man Iterationen wie in Satz 11 für zwei verschiedene Ausgangs-Vektoren $\mathfrak{z}^{(1)}$ und $\mathfrak{z}_1^{(1)}$ durch, bis $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$, $\mathfrak{z}_1^{(\nu)}$, $\mathfrak{z}_1^{(\nu+1)}$ annähernd parallel sind, treibe aber die numerische Genauigkeit so weit, daß die Richtungsunterschiede von $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ und $\mathfrak{z}_1^{(\nu+1)}$ noch merklich sind. Dann ist, wenn z^2 bzw. z'^2 die Quadratsumme der Komponenten von $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$ bzw. $\mathfrak{z}_1^{(\nu+1)}$ bezeichnet, $\mathfrak{x}_2$ parallel $z'\,\mathfrak{z}^{(\nu+1)} - z\,\mathfrak{z}_1^{(\nu+1)}$ und λ_2 gleich dem mit $\mu^{(\nu+1)}$ multiplizierten Quotienten irgend einer Komponente dieses Vektors durch die gleiche Komponente von $z'\,\mathfrak{z}^{(\nu+2)} - z\,\mathfrak{z}_1^{(\nu+2)}$.

In einem Beispiel mit $n = 3$, das später näher besprochen werden soll, ergaben sich nach 7-maliger Iteration für $\mathfrak{z}^{(8)}$ und $\mathfrak{z}_1^{(8)}$ die Komponenten, die in den ersten beiden Spalten der folgenden Zahlentafel stehen:

$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{z}'$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{x}_2$
64503 88100	50945 41350	0	5069,1
50945 41350	40237 12989	$1588152 \cdot 10^8$	— 6783,9
6029 77820	4762 28232	$-385165 \cdot 10^8$	3090,1

Man müßte hier, um $\mathfrak{x}_2$ nach dem eben ausgesprochenen Satz zu erhalten, die Quadratsumme der beiden Spalten bilden, daraus die Wurzeln ziehen, und mit dem so gewonnenen z, z' die lineare Kombination $z'\,\mathfrak{z} - z\,\mathfrak{z}'$ rechnen. Dabei wäre es unerläßlich, die Wurzeln auf etwa 10 Stellen genau zu bestimmen, was nicht unerhebliche Schwierigkeiten verursacht. Man kann ihnen auf folgende Weise aus dem Wege gehen: Da $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ nahezu parallel sind, kann man gewiß (in vielfacher Weise) eine Zahl $\varkappa$ so wählen, daß die Differenz zwischen $\mathfrak{z}'$ und $\varkappa\,\mathfrak{z}$ ein im Verhältnis zu $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{z}'$ kleiner Vektor wird. Wir setzen daher

$$\mathfrak{z}' = \varkappa\,\mathfrak{z} + \bar{\mathfrak{d}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und vernachlässigen beim Quadrieren die zweite Potenz von $\bar{\mathfrak{d}}$. So erhalten wir

$$z'^2 = \varkappa^2 z^2 + 2\,\varkappa\,\mathfrak{z} \cdot \bar{\mathfrak{d}}\,; \qquad z' = \varkappa z + \frac{\mathfrak{z} \cdot \bar{\mathfrak{d}}}{z}$$

und weiter

$$z'\,\mathfrak{z} - z\,\mathfrak{z}' = \varkappa z\,\mathfrak{z} + \mathfrak{z}\frac{\mathfrak{z} \cdot \bar{\mathfrak{d}}}{z} - \varkappa z\,\mathfrak{z} - z\,\bar{\mathfrak{d}} = \frac{1}{z}\left[(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{d})\,\mathfrak{z} - z^2\,\bar{\mathfrak{d}}\right].$$

Demnach kann man für $\mathfrak{x}_2$ den Vektor

$$(\mathfrak{z} \cdot \bar{\mathfrak{d}})\,\mathfrak{z} - z^2\,\bar{\mathfrak{d}} = \sum_1^n z_i\,\bar{d}_i \cdot \mathfrak{z} - \sum_1^n z_i^2 \cdot \bar{\mathfrak{d}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

setzen. Die Komponenten z_i sind unmittelbar in der ersten Kolonne der Zahlentafel gegeben, die von $\bar{\mathfrak{d}}$ sind noch aus (18) zu bestimmen. Dabei kann man $\varkappa$ in (18) verschieden wählen. Das einfachste wird es sein, die erste Komponente von $\bar{\mathfrak{d}}$ willkürlich zu Null zu machen, also

$$z_1' = \varkappa\, z_1\,, \qquad \varkappa = \frac{z_1'}{z_1}.$$

Dann hat man als weitere Komponenten von $z_1\,\bar{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}$ die Determinanten zweiter Ordnung

$$z_1\,z_2' - z_1'\,z_2\,, \qquad z_1\,z_3' - z_1'\,z_3\,, \ldots z_1\,z_n' - z_1'\,z_n\,,$$

die aus der zweiten, dritten . . . n-ten Zeile der beiden ersten Spalten der Zahlentafel mit der ersten Zeile gebildet werden. Die drei Komponenten von $\mathfrak{d} \equiv z_1\,\bar{\mathfrak{d}}$ (mit der Rechen-

maschine bestimmt) sind in der dritten Spalte der Tafel eingetragen. Die Summe der Produkte der ersten und dritten Spalte gibt $7858{,}7 \cdot 10^{20}$, die Quadratsumme der ersten Spalte ist $6792{,}5 \cdot 10^{16}$. Daher setzt man für $\mathfrak{x}_2$ das z_1-fache von (19):

$$7858{,}7 \cdot 10^{20}\, \mathfrak{z} - 6792{,}5 \cdot 10^{16}\, \mathfrak{d}\,.$$

Dabei reicht die angeschriebene Stellenzahl hin, um das Resultat mit der Genauigkeit anzugeben, die in der letzten Spalte der Tafel zu finden ist.

Den zweiten Eigenwert λ_2 kann man, ohne die Längen z und z' zu benutzen, jetzt — wie man leicht nachrechnet — auch erhalten, indem man eine beliebige Komponente von $\mathfrak{d}$ durch die entsprechende, mit dem um 1 höheren Iterationsindex dividiert. Es gilt also analog zu (7)

$$\mu^{(\nu)} \frac{\mathfrak{d}^{(\nu)}}{\mathfrak{d}^{(\nu+1)}} \to \lambda_2 \lambda_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Hat man die Aufgabe, bei größerem n noch höhere Eigenwerte und Eigenlösungen zu bestimmen, so muß man von drei oder mehr Ausgangsvektoren ausgehen, die der Bedingung unterworfen sind, daß ihre Koeffizienten $c_1, c_2, c_3, \ldots c_1', c_2', c_3', \ldots c_1'', c_2'', c_3'', \ldots$ usf. linear unabhängige Systeme bilden. Die dritte Eigenlösung ist dann in der linearen Mannigfaltigkeit enthalten, welche durch die nach ν-maliger Iteration gefundenen Vektoren $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}, \mathfrak{z}_1^{(\nu+1)}, \mathfrak{z}_2^{(\nu+1)}$ ausgespannt wird, und ist daraus und den Bedingungen des Normalstehens auf $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ zu rechnen. — Wir wollen, ehe wir dafür Formeln angeben, noch ein Verfahren skizzieren, das bei Aufsuchung sämtlicher Eigenlösungen die Rechnungen gewiß vereinfacht und übersichtlicher macht, das aber oft auch schon bei Ermittlung der ersten Eigenlösung vorgezogen werden wird.

Wir wählen als ersten Ausgangsvektor $\mathfrak{z}^{(1)}$ den Vektor $\mathfrak{a}_1$, dessen Komponenten die erste Zeile (und Spalte) der gegebenen Matrix $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}$ bilden, und iterieren ihn, mit $\mu^{(1)} = 1$. Dann hat

$$\mathfrak{z}^{(2)} = \mathfrak{A}\, \mathfrak{z}^{(1)} = \mathfrak{A}\, \mathfrak{a}_1$$

zur ersten Komponente die Quadratsumme aus den Elementen der ersten Zeile von $\mathfrak{A}$, nämlich $a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2$, zur zweiten Komponente die Summe der Produkte aus den Elementen der ersten und zweiten Zeile $a_{11}\, a_{12} + a_{12}\, a_{22} + \ldots + a_{1n}\, a_{2n}$ usf. Dieser Vektor heiße $\mathfrak{a}_1^{(2)}$, seine Komponenten seien mit $a_{11}^{(2)}, a_{12}^{(2)}, \ldots a_{1n}^{(2)}$ bezeichnet. Nimmt man nun als Ausgangsvektor den aus den Elementen der zweiten Zeile von $\mathfrak{A}$ gebildeten Vektor $\mathfrak{a}_2$, dann den aus der dritten Zeile gebildeten $\mathfrak{a}_3$ usf., leitet jedesmal die Iterierte, mit $\mu^{(1)} = 1$ ab und stellt die n Resultate spaltenweise zusammen, so erhält man eine neue quadratische Matrix

$$\mathfrak{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^{(2)} & a_{n2}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

die offenbar wieder symmetrisch ist. Denn es ist atwa $a_{12}^{(2)}$ die Produktsumme aus den Elementen der ersten und zweiten Zeile und $a_{21}^{(2)}$ die aus den Elementen der zweiten und ersten. Man nennt in der Algebra die hier eingeführte Matrix $\mathfrak{A}^{(2)}$ das Produkt von $\mathfrak{A}^{(1)}$ mit sich selbst.

Iteriert man nochmals, mit $\mu^{(2)} = 1$, so erhält man als zweite Iterierte von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ neue n Vektoren, deren Komponenten nebeneinander gestellt, wieder eine Matrix $\mathfrak{A}_3$ geben. Es ist nun bekannt und auch unmittelbar leicht einzusehen, daß der Uebergang von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}^{(2)}$, von $\mathfrak{A}^{(2)}$ zu $\mathfrak{A}^{(3)}$ usf. eine Operation ist, die dem assoziativen Gesetz folgt: Statt aus $\mathfrak{A}^{(2)}$ erst $\mathfrak{A}^{(3)}$ und daraus $\mathfrak{A}^{(4)}$ zu rechnen, kann man direkt zu $\mathfrak{A}^{(4)}$ übergehen, indem man $\mathfrak{A}^{(2)}$ mit sich selbst multipliziert. Von $\mathfrak{A}^{(4)}$ geht man direkt zu $\mathfrak{A}^{(8)}$, von hier zu $\mathfrak{A}^{(16)}$ über, immer durch den gleichen Prozeß des »Quadrierens«. Das erste Element $a_{11}^{(8)}$ ist die Quadratsumme der Elemente der ersten Zeile von $\mathfrak{A}^{(4)}$ usf., allgemein ein Element von $\mathfrak{A}^{(8)}$ die Produktsumme:

$$a_{ik}^{(8)} = a_{i1}^{(4)}\, a_{k1}^{(4)} + a_{i2}^{(4)}\, a_{k2}^{(4)} + \ldots + a_{in}^{(4)}\, a_{kn}^{(4)}\,.$$

Man sieht, daß hier viel Arbeit erspart wird. Denn die Spalten (oder Zeilen) von $\mathfrak{A}^{(16)}$, die beim vierten Schritt — von $\mathfrak{A}$ ausgehend über $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{A}^{(4)}$, $\mathfrak{A}^{(8)}$ — erreicht werden, enthalten die fünfzehnte Iteration der ursprünglichen Ausgangsvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$. Auch ist das Quadrieren einer symmetrischen Matrix eine völlig mechanische mit der Rechenmaschine bequem durchzuführende Arbeit.

Da die Operation $\mathfrak{A}$ angewendet auf den Vektor 1, 0, 0, . . . 0 den Vektor $\mathfrak{a}_1$ ergibt, sind die Spalten von $\mathfrak{A}^{(16)}$, die die fünfzehnten Iterierten von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ sind, auch die sechzehnte Iteration der Vektoren

$$\begin{array}{l} 1,\ 0,\ 0,\ 0\ \ldots \\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\ \ldots \\ 0,\ 0,\ 1,\ 0\ \ldots \\ \cdot\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Auf diese Weise erkennt man, daß die Koeffizientensysteme

$$c_1, c_2, \ldots c_n, \quad c_1', c_2', \ldots c_n', \quad c_1^{(n-1)}, c_2^{(n-1)}, \ldots c_n^{(n-1)}$$

der n Ausgangsvektoren, wie oben gefordert wurde, linear unabhängig sind. Denn es ist ja $c_i = x_1^{(i)}$, $c_i' = x_2^{(i)}$, . . . $c_i^{(n-1)} = x^{(i)}$, wenn mit $x_\varkappa^{(i)}$ die $\varkappa$-te Komponente der i-ten Eigenlösung $\mathfrak{x}_i$ bezeichnet wird, (wobei die Eigenlösungen $\mathfrak{x}_i$ jetzt normiert vorausgesetzt sind, d. h. $\mathfrak{x}_i^2 = 1$). Die n^2 Ausgangskoeffizienten bilden also ein orthogonales, daher linear unabhängiges System.

Hat man durch viermaliges sukzessives Quadrieren $\mathfrak{A}^{(16)}$ errechnet, so steht noch die Wahl offen, welche Kolonnen bzw. welche Zusammenfassung von r Kolonnen, man zur Berechnung der r-ten Eigenlösung heranziehen will. Auch besitzt man bei diesem Verfahren eine Kontrolle dafür, ob die Iteration schon weit genug getrieben ist, ohne daß man die ν-te und $(\nu+1)$-te Iteration nebeneinander betrachten müßte. Es müssen nämlich sämtliche Spalten der Matrix, in den Grenzen der geforderten Genauigkeit, einander proportional sein. Ein gewisser Nachteil der Methode ist der, daß sich beim Potenzieren der Matrix etwaige Rechenfehler fortpflanzen, nicht, wie sonst bei den Verfahren der Näherungsfolgen, bloß konvergenzverzögernd wirken.

Wer mit den Elementen der Algebra vertraut ist, kann die in Satz 11 und 13 ausgesprochenen limes-Formeln für die Eigenlösungen auch aus der sogenannten Bilinearformel ableiten. Nach dieser gilt, wenn $a_{i\varkappa}$ ein beliebiges Glied der ursprünglichen $\mathfrak{A}$-Matrix, $x_i^{(\varkappa)}$ die i-te Komponente der $\varkappa$-ten Eigenlösung bezeichnet und jede der n Eigenlösungen normiert, also von der Länge eins, vorausgesetzt wird:

$$a_{ik} = \frac{x_i^{(1)}\, x_\varkappa^{(1)}}{\lambda_1} + \frac{x_i^{(2)}\, x_\varkappa^{(2)}}{\lambda_2} + \ldots \frac{x_i^{(n)}\, x_\varkappa^{(n)}}{\lambda_n}.$$

Außerdem lehrt die Algebra, daß die ν-te Iterierte $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ der ursprünglichen Matrix $\mathfrak{A}$ die gleichen Eigenlösungen wie $\mathfrak{A}$ und die ν-ten Potenzen $\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu, \ldots \lambda_n^\nu$ der Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ zu Eigenwerten besitzt. Demnach gilt für ein Glied $a_{i\varkappa}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ die Formel:

$$a_{i\varkappa}^{(\nu)} = \frac{x_i^{(1)}\, x_\varkappa^{(1)}}{\lambda_1^\nu} + \frac{x_i^{(2)}\, x_\varkappa^{(2)}}{\lambda_2^\nu} + \ldots + \frac{x_i^{(n)}\, x_\varkappa^{(n)}}{\lambda_n^\nu}.$$

Hieraus folgen durch direkte Ausrechnung die Behauptungen von Satz 11 und 13.

Wir erläutern das Verfahren an einem Beispiel mit $n = 3$, das die Gedankengänge der Rechnung klar hervortreten läßt, wenn es auch vielleicht des kleinen n wegen noch nicht geeignet erscheint, den großen Vorteil der Methode gegenüber der direkten Rechnung (Ausrechnung und Lösung der Säkulargleichung) ins rechte Licht zu setzen. Es seien vorgelegt die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda\,(x_1 + x_2), \\ x_2 &= \lambda\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{5}\right), \\ x_3 &= \lambda\left(\quad\ \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{10}\right). \end{aligned}$$

Es ist also, wenn wir $\lambda' = 10\,\lambda$ setzen:

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 20 \\ 150 & 129 & 12 \\ 20 & 12 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 62900 & 49590 & 5900 \\ 49590 & 39285 & 4608 \\ 5900 & 4608 & 569 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^{(8)} = \begin{pmatrix} 6\,450\,388\,100 & 5\,094\,541\,350 & 602\,977\,820 \\ 5\,094\,541\,350 & 4\,023\,712\,989 & 476\,228\,232 \\ 602\,977\,820 & 476\,228\,232 & 56\,367\,425 \end{pmatrix}.$$

Die drei Vektoren, die durch die drei Spalten der letzten Matrix dargestellt werden, sind schon annähernd parallel. (Die beiden ersten hatten wir als $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ in der ersten

und zweiten Spalte des S. 159 behandelten Beispiels genommen.) Hätten wir nur die Aufgabe, die erste Eigenlösung zu rechnen, so könnten wir die Iteration auf dieser Stufe bereits beenden. — Da wir aber auch $\mathfrak{x}_2$ kennen wollen, so rechnen wir aus $\mathfrak{A}^{(8)}$ die Determinanten zweiter Ordnung unter Festhaltung des ersten Elementes a_{11}. Es ergeben sich die folgenden beiden Vektoren $\mathfrak{d}^{(8)}$ (aus der 1. und 2. bzw. aus der 2. und 3. Spalte von $\mathfrak{A}^{(8)}$ gebildet):

$$\begin{matrix} 0 \\ 158815201208400 \\ -\ 38516546017800 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 0 \\ -\ 38516546017800 \\ 9516039690100. \end{matrix}$$

(Der erste dieser beiden Vektoren fand sich in der dritten Spalte des Beispiels S. 159.) Diese beiden Vektoren sind noch nicht mit hinreichender Genauigkeit parallel. Daß sie als Differenzen zweier zwanzigstelliger Zahlen nur dreizehn- bis fünfzehnstellig sind, daß also zirka sechs Stellen bei der Differenzenbildung übereinstimmten, ist eine Folge davon, daß die Spalten von $\mathfrak{A}^{(8)}$ schon weitgehend der Bedingung der Proportionalität genügen. — Die Elemente von $\mathfrak{A}^{(16)}$ sind rund zwanzigstellige Zahlen. Wir berechnen sie auf sechzehn Stellen, da dies noch mit der Rechenmaschine ohne weiteres geschehen kann:

$$\mathfrak{A}^{(16)} = 10^4 \begin{pmatrix} 67925440458\,89398, & \cdot & \cdot \\ 53647896163\,13434, & 42371411113\,66098 & \cdot \\ 6349593681\,69885, & 5014944919\,09991, & 5935528669\,6693 \end{pmatrix}.$$

Berechnet man sodann aus $\mathfrak{A}^{(16)}$ die Determinanten zweiter Ordnung durch abgekürzte Multiplikation, so hat man die Differenzen von 16-stelligen Zahlen zu bilden, die ungefähr in den ersten zwölf Ziffern übereinstimmen, und man erhält somit als Komponenten von $\mathfrak{d}^{(16)}$:

$$\begin{matrix} 0 \\ 28755 \cdot 10^{24} \\ -\ 6987 \cdot 10^{24} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 0 \\ -6987 \cdot 10^{24} \\ 1698 \cdot 10^{24} \end{matrix}$$

Diese beiden Vektoren sind bereits mit hinlänglicher Genauigkeit parallel. Will man $\mathfrak{d}^{(16)}$ noch genauer kennen, so muß man $\mathfrak{A}^{(16)}$ genauer berechnen. Aus den vollständigen Werten der $a_{i\varkappa}^{(16)}$ lassen sich die Werte von $\mathfrak{d}^{(16)}$ auf acht Stellen genau mit der Rechenmaschine bestimmen:

$$\begin{matrix} 0 \\ 287548439 \cdot 10^{20} \\ -\ 69867333 \cdot 10^{20} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 0 \\ -69867333 \cdot 10^{20} \\ 16976514 \cdot 10^{20} \end{matrix}$$

Wir können nun die beiden Eigenlösungen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ angeben. Die erste $\mathfrak{x}_1$ entnimmt man aus einer der drei Spalten von $\mathfrak{A}^{(16)}$, also etwa aus der ersten:

$$\mathfrak{x}_1 = 67925440 \cdot 10^{12} : 53647895 \cdot 10^{12} : 6349594 \cdot 10^{12} = 1 : 0{,}7898056 : 0{,}09347887.$$

Um die zweite Eigenlösung zu finden, brauchen wir noch

$$\sum_1^3 z_i d_i = 10^{32} \cdot (53647896 \cdot 287548439 - 6349594 \cdot 69867333) = 10^{40} \cdot 149827396$$

und $$z^2 = 10^{24} \cdot (67925440^2 + 53647896^2 + 6349594^2) = 75322795 \cdot 10^{32}.$$

Der Vektor (19) für $\mathfrak{x}_2$, das ist $(z\,\mathfrak{d})\,\mathfrak{z} - z^2\,\mathfrak{d}$ hat somit folgende Komponenten (abgesehen von der Potenz 10^{68}):

$$\begin{aligned} 1{,}0177 - 0 &= 1{,}0177 \\ 0{,}8038 - 2{,}1659 &= -1{,}3621 \\ 0{,}0951 + 0{,}5263 &= 0{,}6214. \end{aligned}$$

Es ist also $\mathfrak{x}_2 = 1 : -1{,}3391 : 0{,}61059$. Das skalare Produkt $\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2$ gibt Null mit der zu erwartenden Genauigkeit.

Will man die Eigenwerte λ_1 und λ_2 unabhängig von den Eigenlösungen bestimmen, so kann dies nach Formel (20) geschehen, wenn man außer $\mathfrak{A}^{(16)}$ noch $\mathfrak{A}^{(17)}$ rechnet. Man kann aber auch $\mathfrak{A}^{(8)}$ und $\mathfrak{A}^{(16)}$ verwenden und erhält, wenn man ein beliebiges Element $a_{i\varkappa}{}^{(8)}$ durch das entsprechende $a_{i\varkappa}{}^{(16)}$ dividiert und logarithmisch die achte Wurzel zieht:

$$|\lambda_1| = \sqrt[8]{\frac{a_{i\varkappa}{}^{(8)}}{a_{i\varkappa}{}^{(16)}}} = 0{,}558719.$$

Man erhält den gleichen Wert für λ_1, gleichgültig, welches der sechs verschiedenen Elemente von $\mathfrak{A}^{(8)}$ bzw. $\mathfrak{A}^{(16)}$ man heranzieht. Analog findet man:

$$\frac{1}{|\lambda_1|}\sqrt{\frac{d_i^{(8)}}{d_i^{(16)}}} = |\lambda_2| = 2{,}955,$$

wobei wieder zur Berechnung ein beliebiges der verschiedenen Elemente von $\mathfrak{d}^{(8)}$ bzw. $\mathfrak{d}^{(16)}$ benutzt werden kann. Durch Einsetzen erkennt man, daß $\lambda_1 = +0{,}55872$, $\lambda_2 = -2{,}955$. Die dritte Eigenlösung $\mathfrak{x}_3$ ist bei $n = 3$ dadurch bestimmt, daß sie auf $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ normal steht.

Um die höheren Eigenlösungen allgemein bei $n > 3$ zu bestimmen, beachtet man, daß zunächst $\mathfrak{x}_3$ sich als eine lineare Kombination aus den ersten drei Spalten — oder auch aus irgend welchen drei Spalten — der ν-fach iterierten Matrix darstellt. Bezeichnen wir die ersten Spalten mit $\mathfrak{z}^{(\nu)} = \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_1^{(\nu)} = \mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}_2^{(\nu)} = \mathfrak{z}''$, so gilt für hinlänglich großes ν der Ansatz:

$$\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{z} + a\mathfrak{z}' + b\mathfrak{z}'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

a und b sind daraus zu bestimmen, daß $\mathfrak{x}_3$ auf $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, also auf der Ebene von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ senkrecht steht. Da $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beide in der durch $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ bestimmten Ebene liegen, so wird der Vektor $\mathfrak{x}_3$ auf der Ebene von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ senkrecht stehen, wenn er auf $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ senkrecht steht. Wir erhalten somit die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_3\,\mathfrak{z} = 0 &= z^2 \quad + a\,\mathfrak{z}'\cdot\mathfrak{z} + b\,\mathfrak{z}''\cdot\mathfrak{z}\\ \mathfrak{x}_3\,\mathfrak{z}' = 0 &= \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z}' + a\,\mathfrak{z}'^2 \quad + b\,\mathfrak{z}'\cdot\mathfrak{z}''.\end{aligned}$$

Rechnet man aus diesen Gleichungen a und b aus und geht mit den errechneten Werten in (21) ein, so erält man:

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{z} & \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z} & \mathfrak{z}'\cdot\mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}' & \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z}' & \mathfrak{z}'\,\mathfrak{z}'\\ \mathfrak{z}'' & \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z}'' & \mathfrak{z}'\,\mathfrak{z}''\end{vmatrix} \to \mathfrak{x}_3, \text{ analog dazu war: } \begin{vmatrix}\mathfrak{z} & \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}' & \mathfrak{z}'\cdot\mathfrak{z}\end{vmatrix} \to \mathfrak{x}_2;\ \mathfrak{z} \to \mathfrak{x}_1 \quad . \quad . \quad (21').$$

Man verifiziert leicht noch direkt, daß der erste Ausdruck (21') auf $\begin{vmatrix}\mathfrak{z} & \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}' & \mathfrak{z}'\cdot\mathfrak{z}\end{vmatrix}$ senkrecht steht.

Man kann in vielfältiger Weise analog den Formeln (21') andere Formeln für $\mathfrak{x}_3$ erhalten, wenn man, wie oben, den Ansatz macht, daß $\mathfrak{x}_3$ in dem durch $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}''$ bestimmten Raum liegt und auf der durch $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ bestimmten Ebene senkrecht steht. Das letztere kann man in verschiedener Weise erreichen, indem man zum Ausdruck bringt, daß $\mathfrak{x}_3$ auf irgend zwei Vektoren dieser Ebene senkrecht steht. Bezeichnen wir z. B. mit $\mathfrak{d}$ wie früher einen Vektor, dessen erste Komponente gleich Null ist und dessen weitere $(n-1)$ Komponenten die $(n-1)$ Determinanten zweiter Ordnung sind, die man bei Festhalten der beiden ersten Zeilen aus den zwei Spalten $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ bilden kann; mit $\mathfrak{d}'$ bezeichnen wir den analog den aus $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}''$ bei Festhalten der zwei ersten Zeilen gebildeten, aus den Determinanten dritter Ordnung bestehenden Vektor, dessen zwei erste Komponenten verschwinden. Dann gilt analog zu (19):

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{z} & \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z} & \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{d}\\ \mathfrak{d} & \mathfrak{d}\cdot\mathfrak{z} & \mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}\\ \mathfrak{d}' & \mathfrak{d}'\cdot\mathfrak{z} & \mathfrak{d}'\cdot\mathfrak{d}\end{vmatrix} \to \mathfrak{x}_3, \text{ während } \begin{vmatrix}\mathfrak{z} & \mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z}\\ \mathfrak{d} & \mathfrak{d}\cdot\mathfrak{z}\end{vmatrix} \to \mathfrak{x}_2;\ \mathfrak{z} \to \mathfrak{x}_1 \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Es ist aber wohl der Ausdruck (22) für die numerische Berechnung gegenüber (21') kaum überlegen, da die Koeffizienten von $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$, das sind $\begin{vmatrix}\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{z} & \mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}\\ \mathfrak{d}'\cdot\mathfrak{z} & \mathfrak{d}'\cdot\mathfrak{d}\end{vmatrix}$ usw., auch die Eigenschaft haben, daß sie kleine Differenzen großer Zahlen sind.

Wir können den Ausdruck (21') noch etwas anders schreiben, wenn wir uns erinnern, daß $\mathfrak{z}^{(\nu)}\cdot\mathfrak{z}^{(\nu)} = a_{11}^{(2\nu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}\cdot\mathfrak{z}_1^{(\nu)} = a_{12}^{(2\nu)}$, usf. Dann kommt, wenn wir noch setzen:

$$\begin{vmatrix}a_{12}^{(2\nu)} & a_{22}^{(2\nu)}\\ a_{13}^{(2\nu)} & a_{23}^{(2\nu)}\end{vmatrix} = D_1^{(2\nu)}; \quad \begin{vmatrix}a_{13}^{(2\nu)} & a_{23}^{(2\nu)}\\ a_{11}^{(2\nu)} & a_{21}^{(2\nu)}\end{vmatrix} = D_2^{(2\nu)}; \quad \begin{vmatrix}a_{11}^{(2\nu)} & a_{12}^{(2\nu)}\\ a_{21}^{(2\nu)} & a_{22}^{(2\nu)}\end{vmatrix} = D_3^{(2\nu)}$$

$$\mathfrak{z}^{(\nu)}\cdot D_1^{(2\nu)} + \mathfrak{z}_1^{(\nu)} D_2^{(2\nu)} + \mathfrak{z}_2^{(\nu)} D_3^{(2\nu)} \to \mathfrak{x}_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21'').$$

Will man die bei Berechnung der $D_i^{(2\nu)}$ auftretenden kleinen Differenzen großer Zahlen vermeiden, so bleibt die Möglichkeit, aus der ursprünglichen Matrix (oder auch erst nach mehrmaligem Potenzieren) eine neue abzuleiten, die $\binom{n}{2}$ Zeilen (Spalten) besitzt, deren

Elemente die sämtlichen Determinanten zweiter Ordnung sind. Iteriert man diese bis zum Index 2ν, so erhält man die $D_i^{(2\nu)}$ sämtlich. Solcher $D_i^{(2\nu)}$ gibt es wegen der Symmetrie, wenn man $\binom{n}{2} = m$ setzt, $\frac{m(m+1)}{2}$ verschiedene; wir brauchen aber nur drei von ihnen, so daß diese Mühe im allgemeinen nicht lohnen wird.

Den Eigenwert λ_3 erhält man analog zu (17):

$$\left|\begin{array}{lll} \mathfrak{d}^{(\nu)} & \mathfrak{d}^{(\nu)}\cdot\mathfrak{d}^{(\nu)} & \mathfrak{d}^{(\nu)}\cdot\mathfrak{d}_1^{(\nu)} \\ \mathfrak{d}_1^{(\nu)} & \mathfrak{d}^{(\nu)}\cdot\mathfrak{d}_1^{(\nu)} & \mathfrak{d}_1^{(\nu)}\cdot\mathfrak{d}_1^{(\nu)} \\ \mathfrak{d}_2^{(\nu)} & \mathfrak{d}^{(\nu)}\cdot\mathfrak{d}_2^{(\nu)} & \mathfrak{d}_1^{(\nu)}\cdot\mathfrak{d}_2^{(\nu)} \end{array}\right| \Big/ \left|\begin{array}{lll} \mathfrak{d}^{(\nu+1)} & \text{»} & \text{»} \\ \mathfrak{d}_1^{(\nu+1)} & \text{»} & \text{»} \\ \mathfrak{d}_2^{(\nu+1)} & & \end{array}\right| \to \lambda_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

wobei im Zähler und Nenner eine beliebige Komponente der auftretenden Vektoren genommen werden darf. Es gilt außerdem analog zu (20):

$$\frac{\mathfrak{d}'^{(\nu)}}{\mathfrak{d}'^{(\nu+1)}} \to \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

wobei eine beliebige, von Null verschiedene Komponente des Determinantenvektors dritter Ordnung $\mathfrak{d}'$ zu verwenden ist. Die Formeln (21) bis (24) haben eine Gestalt, in der die Uebertragung auf höhere Eigenlösungen und Eigenwerte unmittelbar ersichtlich ist. — Wir fassen die Ergebnisse zusammen in:

Satz 14. Wird eine beliebige symmetrische Matrix hinlänglich oft iteriert (mit sich selbst multipliziert), so erhält man schließlich eine Matrix, die in jeder ihrer Spalten (Zeilen) den n-dimensionalen Vektor der ersten Eigenlösung der ursprünglichen Matrix darstellt. Eine durch die Orthogonalitätsbedingungen eindeutig bestimmte lineare Kombination aus irgend r Spalten dieser Matrix liefert die r-te Eigenlösung der Ausgangsmatrix [(21), (22)], während die zugehörigen Eigenwerte, bzw. bestimmte Potenzen von ihnen, durch Division entsprechender Ausdrücke für je zwei Iterationen gemäß (17), (20) bzw. (23), (24) gewonnen werden.

Es sei noch hervorgehoben, daß die Ermittlung einer bestimmten Eigenlösung bzw. eines Eigenwertes aus (21) bis (23) geschehen kann, ohne daß vorher die entsprechenden Größen von niedrigerem Index gefunden worden wären, und daß auch die Berechnung der Eigenlösungen nach unserm Verfahren von der der Eigenwerte unabhängig ist.

887

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr. KARL **STUMPFF,** Assistent der Universitäts-Sternwarte zu Breslau. Analyse periodischer Vorgänge. Ein Abriß der Periodographie mit besonderer Berücksichtigung moderner Methoden. Samml. geophysikalischer Schriften Nr. 6. Mit 41 Figuren und 14 Tabellen im Text sowie 1 Volldrucktafel. Verlag Gebr. Borntraeger, Berlin 1927. X + 185 S. Preis 14,40 M.

Das Buch behandelt das für viele Anwendungsgebiete wichtige Problem, eine durch Beobachtung gefundene Funktion einer Variabeln auf periodische Bestandteile zu untersuchen. Der Ausgangspunkt und das Ziel der Darstellung ist dabei stets die praktische Rechnung; demgegenüber treten prinzipielle mathematische Betrachtungen zurück.

In dem einleitenden Kapitel I wird das Wesentliche über empirische Funktionen und die Grundtatsachen der Fehlertheorie gesagt. Es folgt in Kapitel II die eigentliche Fourieranalyse mit den verschiedenen Methoden rechnerischer, zeichnerischer und instrumenteller Konstantenbestimmung. Kapitel III bringt zunächst für den Fall bekannter Perioden die Amplituden- und Phasenbestimmung, dann dasselbe nebst der Periodenbestimmung für den Fall unbekannter Perioden; neben den Ergebnissen, die sich auch im allgemeinen Fall aus der Fourierentwicklung gewinnen lassen, werden hier die Methoden besprochen, die sich bei äquidistanten Ordinaten auf die Betrachtung sukzessiver Differenzen- oder Summenreihen (bzw. sukzessive Differentiation oder Integration) gründen. Die Schlußkapitel IV und V sind dem besonderen Interessengebiete des Verfassers gewidmet, der sog. Methode des Periodogramms, welche von der Tatsache ausgeht, daß die für irgendeine Periode p formal gebildeten Fourierkoeffizienten für die wirklich

vorkommenden Perioden maximale Werte besitzen. Auf die im letzten Kapitel beschriebenen instrumentellen Methoden zur Ausführung der hier vorkommenden Rechnungen sei besonders hingewiesen.

Das Buch gibt einen guten Ueberblick über das behandelte Gebiet. Die wichtigeren Methoden werden durch praktische Beispiele erläutert; die Schwierigkeiten, welche aus der Unzulänglichkeit praktischer Daten resultieren, werden aufgezeigt und fehlertheoretisch diskutiert.

Auch ein dem Stoffe fernerstehender Leser wird das Buch nicht aus der Hand legen, ohne für die analytische und praktische Seite des Problems Interesse gefaßt zu haben.

Dresden. E. Trefftz. 974

Dr. RUDOLF ROTHE, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil II: Integralrechnung, unendliche Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen. Mit 96 Figuren im Text. Teubners mathem. Leitfäden Band 22. Verlag Teubner, Leipzig und Berlin 1929. VIII + 201 S. Preis kart. 6,40 M.

Der vorliegende zweite Band der Rotheschen »Höheren Mathematik« behandelt die Integralrechnung, die Reihenlehre, Determinanten und Vektoren. Die Integralrechnung wird zunächst als Umkehrung der Differentialrechnung behandelt und die elementar integrierbaren Fälle zusammengestellt. Es folgt das Integral als Summengrenzwert mit der geometrischen Deutung und den geometrischen Anwendungen (einschließlich Planimeter, Integraphen und zeichnerischer Integration). In der Reihentheorie werden die grundlegenden Sätze gegeben und die Potenzreihen ziemlich ausführlich behandelt. Die trigonometrischen Reihen sind etwas zu kurz gekommen; die Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion hätten z. B., wenn auch ohne Beweis, doch wenigstens genannt werden können. — Daß die komplexen Potenzreihen und die komplexen Integrale nicht fehlen, ist sehr zu begrüßen. — Von den Determinanten werden die wichtigsten Sätze an Hand der dreireihigen Determinanten entwickelt, die Vektorrechnung wird soweit dargestellt, wie es für die Punktmechanik erforderlich ist.

Stoffauswahl und Darstellung werden dem Ziel des Buches gerecht, den mathematischen Kenntnissen des Studenten eine solide Grundlage zu geben. Für einen Leser ohne Vorkenntnisse bietet die knappe Darstellungsweise vielleicht Schwierigkeiten, besonders da die eigentlichen Anwendungen nicht sehr zahlreich sind. Zum Gebrauch neben der Vorlesung und zur Auffrischung mathematischer Kenntnisse kann der Band sehr warm empfohlen werden.

Der mäßige Preis — bei tadelloser Ausstattung — wird dem Verlage verdiente Sympathien eintragen.

Dresden. E. Trefftz. 974

Dr.-Ing. F. EISNER, Regierungsbaumeister, Privatdozent an der Techn. Hochschule Berlin. Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern von Kreis- und Brückenpfeilerquerschnitt. Mit 63 Textabbildungen. Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, Heft 4. Verlag Springer, Berlin 1929. VI + 98 S. Preis 10 M.

Die hier mitgeteilten Widerstandsmessungen, die in den letzten 15 Jahren ausgeführt worden sind und die den ersten fertigen Teil eines größeren Versuchsprogramms bilden, tragen zu dem vorhandenen Material über Strömungsformen und Strömungswiderstände wertvolle neue Ergebnisse bei. Die Versuche, die durch Benutzung von Wasser gegenüber Luftversuchen den Vorteil haben, relativ hohe Reynoldssche Kennzahlen (wenigstens bei höheren Temperaturen) leichter zu erreichen, beziehen sich auf Kreiszylinder und 10 verschiedene Typen der in der Ueberschrift bezeichneten Form und sind sowohl mit vollkommen getauchten, als auch die Oberfläche durchsetzenden Zylindern ausgeführt. Neuartig und lehrreich sind die Messungen mit letzterer Anordnung; die vorhandenen Druckunterschiede äußern sich hier in Oberflächenwellen, deren Stereomomentaufnahmen, mittels Stereoautographen ausgewertet, genaue Höhenschichtenpläne der Wellenformen liefern. Die getauchten Kreiszylinder ergeben im entsprechenden Versuchsbereich gute Uebereinstimmung mit den zuverlässigsten aerodynamischen Messungen.

Im übrigen zeigen diese Mitteilungen aufs neue, wie kompliziert die vorliegenden Verhältnisse sind, daß Wellen-, Turbulenz- und Instabilitätserscheinunegn eine Rolle spielen, die in der Theorie noch nicht erfaßt werden können. Deshalb kann die Darstellung der verschiedenen Widerstandstheorien, der ein fast ebenso großer Teil der Mitteilung gewidmet ist, und die an sich übersichtlich und korrekt ist, doch nur als in losem Zusammenhang mit den Messungen selbst stehend betrachtet werden. Insbesondere ist es wohl nicht richtig, den Wert der Oseen-Zeilonschen hydrodynamischen Berechnungen von dem Standpunkt zu beurteilen, daß in einigen Punkten Uebereinstimmung mit den hier einschlägigen Messungen erzielt ist, so hinsichtlich des Druckverlaufs an der Vorderseite, wofür aber auch einfachere Mittel ausreichen würden. Der Hauptwert dieser theoretischen Arbeiten liegt in der Vervollständigung der Stokesschen Widerstandstheorie bei kleiner Kennzahl und in der konsequenten mathematischen Durchführung ihrer Ansätze. Für große Kennzahlen aber ist der Kern der — mathematisch tiefgehenden — Untersuchungen eine willkürlich zu treffende Annahme über die Kurven konstanter Wirbelintensität, die in Wirklichkeit nach den Helmholtzschen Sätzen mit den eben wenig bekannten Stromlinien zusammenfallen. Die Anpassung dieser Annahmen an die andersartig, teils rationell, teils empirisch begründeten Ergebnisse der »Grenzschichttheo-

rie«, die auch F. Eisner vorschlägt, ist zunächst noch ein offenes Programm.

Breslau. F. Noether. 979

JULIUS **ZINGLER,** Oberregierungsrat und Mitglied der Phys.-Techn. Reichsanstalt i. R. Theorie der zusammengesetzten Waagen. Waagen mit Gewichtsschale, Laufgewichtswaagen, Neigungswaagen, Balkenwaagen, Brückenwaagen. Mit 53 Textabbildungen. Julius Springer, Berlin 1928. VIII + 200 S. Preis 13,50 M, geb. 15 M.

Die Literatur über die mechanische Theorie und die Konstruktion der Waagen ist nicht groß. Seit dem Buch von Felgenträger, der im wesentlichen die einfache Waage behandelt hat, ist keine zusammenfassende Darstellung erschienen. Daher ist das vorliegende Werk zu begrüßen, das sich wohl kaum über die elementarsten statischen Ansätze erhebt, aber doch eine für praktische Zwecke ausreichende Behandlung liefert. Die Theorie erstreckt sich auf die Waagen mit Lastschneiden am Neigungshebel und die Waagen mit exzentrischer Kreiskurvenscheibe. Mises. 975

Prof. Dr. F. **AUERBACH** und Prof. Dr. W. **HORT.** Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik. Bd. IV, Lieferung 1. Mit 186 Abb. VI + 198 S. Preis brosch. 20 M. Bd. VI, Lieferung 2. Mit 426 Abb. XVIII + 918 S. Bd. VII, Lieferung 2. Mit 68 Abb. VI + S. 239 bis 490. Preis brosch. 24 M. Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1929.

Die neu vorliegenden Lieferungen gehören zu verschiedenen Teilen des Gesamtwerkes. In IV, 1 gibt zunächst Hertwig eine Statik der Baukonstruktionen, die dieses in letzter Zeit überaus häufig dargestellte Gebiet in kurzer und übersichtlicher Form zusammenfaßt. Es werden durchwegs die klassischen Methoden von Mohr, Müller-Breslau und andern bei einer gewissen Bevorzugung der rechnerischen vor den zeichnerischen Verfahren behandelt. Ein geradezu mustergültiges Referat über die Stabilitätsprobleme der Elastizität liefert Timoshenko. Hier werden unter allseitiger Berücksichtigung auch der neuesten Literatur die sehr mannigfaltigen Aufgaben besprochen, die sich aus dem ursprünglichen einfachen Knickproblem Eulers entwickelt haben und für die Technik von großer Bedeutung sind. Ein weniger abgerundetes Bild bietet naturgemäß der von dem gleichen Verfasser herrührende Artikel über Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Hier ist besonders dankenswert die starke Berücksichtigung auch der ausländischen Arbeiten.

Die zweite Lieferung des VI. Bandes enthält vorzugsweise maschinentechnische Ausführungen zu den in der früher erschienenen ersten Lieferung dargestellten Grundlagen der Aerodynamik. Ueber Windräder, Dampf- und Gasturbinen berichtet G. Flügel. In den rd. 80 Seiten läßt sich natürlich eine erschöpfende Theorie nicht geben, zumal auch vollständige Konstruktionen vorgeführt werden. Immerhin wird der Leser eine Einführung finden, die ihm das Studium der Spezialliteratur ermöglicht. Weit ausführlicher berichtet Everling über die Mechanik der Flugzeuge und ihre Grundlagen. Mit den theoretischen Teilen dieses Referates, die eine ziemlich willkürliche Auswahl von Einzelmitteilungen darstellen, kann sich der Referent nicht befreunden. Eine willkommene Ergänzung hinsichtlich der Theorie des Auftriebs liefert R. Fuchs. Erwähnt sei noch der Schlußaufsatz von W. Hort über Energie und Energieumsetzung in der Kolbenkraftmaschine, der die in der Technik üblichen Diagramme in zusammenfassender Form vorführt.

Band VII, Lieferung 2 führt über das engere Gebiet der Mechanik hinaus, bringt zunächst einen Abriß der Thermodynamik und der kinetischen Gastheorie von Auerbach, dann ein Referat über die statistische Mechanik und die Schwankungserscheinungen von R. Fürth. Hier werden im Rahmen dessen, was die übliche Wahrscheinlichkeitstheorie ermöglicht, die einfachsten mechanischen Massenerscheinungen hauptsächlich im Sinn der Smoluchowskischen Ansätze behandelt. Schließlich dringt der Band mit den Ausführungen von G. Joos über Atommechanik bis zu den neuesten Ansätzen der Quanten- und Wellenmechanik vor, wobei naturgemäß eine Beschränkung auf eine rein skizzenhafte Uebersicht erforderlich war.

Mises. 975

R. **COURANT,** o. Professor an der Universität Göttingen. Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band: Funktionen mehrerer Veränderlicher. Mit 88 Textfiguren. Verlag Springer, Berlin 1929. VII + 360 S. Preis geb. 18,60 M.

Dem ersten, früher angezeigten Band[1]) hat der Verfasser bald den Schlußteil folgen lassen, der die Funktionen mehrerer Veränderlicher unter Innehaltung der gleichen didaktischen Gesichtspunkte behandelt. Stets sind die wesentlichen und anschaulichen Tatsachen vorangestellt; nähere Ausführungen, die der strengeren mathematischen Begründung dienen, sind in der Regel in den Anhang zu den einzelnen Kapiteln verwiesen. Sachlich umfaßt der Band Vorbemerkungen über die dreidimensionale analytische Geometrie und Vektorrechnung, die Differentiation nach mehreren Veränderlichen, etwas über Transformationen und Abbildungen, dann die Integration über mehrdimensionale Bereiche. Manche Sätze über Flächen- und Raumintegrale mit ihren Anwendungen in der Mechanik, die man nur selten in Lehrbüchern der Differentialrechnung findet, werden ausführlich erörtert.

Das jetzt zum Abschluß gebrachte Werk kann als ein für Ingenieure, Physiker und sonstige Naturwissenschaftler durchaus geeignetes Lehrbuch wärmstens empfohlen werden.

Mises. 975

[1]) **Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 154**

NACHRICHTEN

Karl Heun †. Am 10. Januar dieses Jahres verschied in Karlsruhe der langjährige Vertreter der Mechanik an der dortigen technischen Hochschule, Karl Heun. Seit 1902 hatte er den Lehrstuhl für »theoretische Mechanik« inne, wie sein Lehrgebiet im Gegensatz zur »technischen Mechanik« genannt wurde. Es kam in diesen Bezeichnungen eine an anderen Hochschulen nicht übliche Trennung der Unterrichtsgebiete zum Ausdruck, die teils von technischer, teils von allgemein-wissenschaftlicher Seite vertreten wurden. Durch eine infolge von Krankheit eingetretene Lähmung war Heun schon im Jahre 1922 gezwungen, seine Lehrtätigkeit niederzulegen; fast 70jährig, ist er nun seinem schweren Leiden erlegen. Mit Heun ist eine der markantesten Persönlichkeiten unter den Vertretern der Angewandten Mathematik und Mechanik dahingegangen, weniger erkennbar vielleicht für Fernerstehende, aber in die Augen springend für jeden, der nähere Berührung mit ihm gewinnen konnte. Nicht umsonst hat ihn im Jahre 1921 die Technische Hochschule Charlottenburg mit der Verleihung des Dr.-Ing. h. c. anerkannt »als den hervorragenden Gelehrten, der die heutige Entwicklung der angewandten Mathematik und Mechanik mit begründen half und sich dadurch auch um die technischen Wissenschaften bleibende Verdienste erworben hat«[1]).

Von seinen äußeren Lebensschicksalen sei hier nur berichtet, daß er am 3. April 1859 in Wiesbaden geboren wurde, seine mathematischen Studien in Halle und Göttingen betrieb, wo er bereits im Jahre 1881 mit einer Arbeit über Kugelfunktionen (3)[2]) promovierte. Auf diese Gebiete war er geführt worden als Schüler von Heine; außerdem sind Enneper, Schwarz, Schering als die hervorragendsten unter seinen Lehrern zu nennen. Es folgten eine größere Anzahl von Arbeiten aus verwandten mathematischen Gebieten, besonders über die in jener Zeit viel behandelten Riemann-Fuchsschen Funktionen (4 bis 12), darunter die Habilitationsschrift an der Universität München (4, 5), wo er im Jahre 1884 die Venia legendi erwarb.

Uebrigens hat er von dieser nur kürzere Zeit Gebrauch gemacht, sich vielmehr bald dem Schuldienst zugewandt; was ihn von der Universität zur Schule zog, war sicher nicht nur der äußere Zwang, sondern eine ausgesprochene Neigung zu erzieherischen Aufgaben und Verständnis für die Jugend, das er sich noch später bewahrt hat, und das von seinen jugendlichen Freunden mit Liebe und Achtung erwidert wurde. Er war damals in Frankfurt a. M., einige Zeit auch an englischen Schulen als Mathematiker tätig, eine Zeit, von deren reichen Eindrücken er später noch häufig erzählte. Verschiedene Arbeiten dieser Jahre sind aus Einbeck (in Hannover) datiert, und hier war es, wo er seine spätere Gattin, verw. Jatho, fand, die ihm bis zu seinem Lebensende in unermüdlicher, verstehender Aufopferung zur Seite stand, und ihm, obwohl sie selbst bereits das 80. Lebensjahr überschritten hat, die rüstige unersetzliche Stütze im Leiden der letzten Jahre blieb. Die Erinnerung an Karl Heun möge nicht hinausgehen, ohne daß dieser seltenen Frau gedacht wird.

Dann setzte ein neuer Abschnitt in seiner wissenschaftlichen Entwicklung ein, der zeitlich etwa mit seiner 1890 erfolgten Uebersiedlung nach Berlin, als Oberlehrer an dortigen Realschulen, zusammenfällt. Seine erste Publikation über Mechanik, noch vom Standpunkt der analytischen Durchrechnung einer Einzelaufgabe, ist die Note über das Gaußsche Bifilarpendel (13); im Zusammenhang mit der Mechanik steht auch die nachfolgende Arbeit über näherungsweise Integration (14), die er später noch, in Fortführung Rungescher Gedanken auf Differentialgleichungen ausdehnte (18). In den kommenden Jahren muß er sich mehr und mehr mit den Grundlagen und der historischen Entwicklung der Mechanik beschäftigt haben, der weiterhin seine Lebensarbeit galt, zugleich auch mit den Ideenbildungen, die parallel dazu, und teilweise unabhängig, durch die Entwicklung der Maschinenlehre entstanden. Denn im Jahre 1896 hielt er auf der Frankfurter Naturforscherversammlung einen Vortrag »über die mathematischen und mechanischen Prinzipien in Anwendung auf technische Probleme« (15), und im darauffolgenden Jahre übernahm er von der Mathematikervereinigung den Auftrag zur Erstattung des ausführlichen Berichts, den er unter dem Titel: »Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik« (19) im Jahre 1900 vorlegen konnte. In kritischer und historischer Betrachtung hat er hier die Stellung der »technischen Mechanik« zur allgemeinen Mechanik formuliert, einerseits ihre Einordnung in die allgemeinen Prinzipien, aber andererseits auch ihre Selbständigkeit, die aus der physikalisch-technischen Problemstellung fließt. Sie konnte der allgemeinen Mechanik neue Impulse geben, weil sie »ihre theoretischen Bewegungsprobleme nicht nach Belieben stellen kann, wie die rationelle Mechanik ihre Uebungsbeispiele«. Zum ersten Male wurden hier viele der in technischen Einzelarbeiten zerstreuten Resultate der hervorragendsten Techniker, wie Redtenbacher, Radinger u. a. in den Rahmen der rationellen Systemmechanik eingeordnet, und so ihre Tragweite klargestellt und erweitert. Die Darstellung umfaßt, um nur das Wichtigste zu nennen, die Kinetik des Kurbelgetriebes und der Schienenfahrzeuge, Radingers Dampfmaschinentheorie, die Stabilität der Bewegungen, sowie Reibungs- und Stoßgesetze, und zeugt, wie jede von Heuns Arbeiten, die immer mit einer historischen Entwicklung der Problemstellung beginnen, von einer ganz außergewöhnlichen historischen Belesenheit des Verfassers.

[1]) Vergl. auch diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 232.

[2]) Die Zahlen im Text beziehen sich auf die Nummern des nachfolgenden Verzeichnisses der Veröffentlichungen.

Das Gebiet, das hauptsächlich von der allgemeinen Mechanik zu wenig beachtet war, obgleich ihre Prinzipien zu seiner Beherrschung ausreichen, ist die »Kinetostatik«, die Bestimmung der Verbindungsreaktionen der bewegten Systeme, die für die Festigkeitsbeanspruchungen bestimmend sind. Nur Heinrich Hertz hatte, wie Heun in einer gesonderten Note (20) hervorhob, die Wichtigkeit der kinetostatischen Problemstellung klar erkannt. Auf die gleiche Fragestellung beziehen sich dann noch weitere ausführlichere Arbeiten Heuns aus dieser oder späterer Zeit (21, 26). Er geht hier wieder von den Lagrangeschen Gleichungen aus, die ebenso, wie sie die verallgemeinerten Ausdrücke für die gegebenen oder »eingeprägten« Kräfte enthalten, auf die Einzelteile des verbundenen Systems angewendet die Verbindungsreaktionen zu bestimmen geeignet sind. Daß die Bedeutung der Lagrangeschen Mechanik gerade in dieser Hinsicht wenig erkannt wurde, liegt vorwiegend an der Form, in der ihr Begründer sie darstellte. In der Vorrede zur »Mécanique analytique« hat sich dieser ja selbst gerühmt, daß in seinem Buche weder Konstruktionen, noch geometrische Betrachtungen, sondern nur analytische Operationen zu finden seien und hat dadurch gerade die Beziehungen seiner Gleichungen zu den technischen Problemen verschleiert. In den genannten Arbeiten wird ihre Brauchbarkeit an spezifisch technischen Konstruktionen, wie dem Kurbelmechanismus, dem Zentrifugalregulator und ähnlich wichtigen Maschinenteilen illustriert, um sie dadurch den wissenschaftlich arbeitenden Technikern näher zu bringen.

Der Bericht, der Heun in weiteren, auch technischen Kreisen bekannt machte, zog im Jahre 1902 seine Berufung auf den Lehrstuhl in Karlsruhe nach sich, als Nachfolger Schells, diesem aber weit überlegen in der wirklichen mechanischen Erfassung seines Lehrgebietes. Er war durchdrungen von dem Bestreben, den prinzipiell physikalischen Kern der Mechanik wieder ins rechte Licht zu setzen, im Gegensatz zu der Gestaltung, die die Mechanik in den Händen der unter dem Eindruck von Jacobis großen Erfolgen stehenden, aber rein mathematisch gerichteten Nachfolger im Unterricht vielfach genommen hatte. Ungefähr von dieser Zeit ab datieren bekanntlich auch die parallelen Bestrebungen F. Kleins im Universitätsunterricht, und dieser hat in Heun nicht nur einen Mitarbeiter, sondern auch unabhängigen Wegbereiter gefunden. Was Heun anstrebte, hat er in seiner Antrittsrede in Karlsruhe (21) mit wenigen Worten klar zum Ausdruck gebracht:

»Unser vergangenes Jahrhundert hat die Erstarrung der klassisch entwickelten Mechanik erlebt. Wohl gingen die Mathematiker und Astronomen nach dem Vorgange Hamiltons auf Lagrange zurück, aber sie pflegten fast ausschließlich die Mechanik freier Punkte und vernachlässigten dabei die größte Leistung ihres genialen Lehrmeisters, die Mechanik gebundener Systeme, welche die Grundlage der physikalischen und technischen Anwendungen bildet. .... Dieselben Jahre zeitigten eine ebenso ungesunde Entwicklung der technischen Mechanik, von welcher nur die Statik und Festigkeitslehre unberührt blieb. Nach Redtenbachers Tod begannen die kinematischen Bestrebungen in Deutschland breiteren Boden zu gewinnen. Ihr Ziel war die Schaffung einer wissenschaftlichen Grundlage des Maschinenbaues. Leider knüpfte man hier nicht an Lagrange und Poncelet an, sondern an ein mißverstandenes Exposé Ampères. In diesem wurde eine rein geometrische Kinematik der Mechanismen konzipiert und damit auf ein Arbeitsfeld hingewiesen, welches .... den Zielen einer technischen Kinetik ferner stand, als irgendein anderer Zweig der abstrakten Mechanik. Der Mißerfolg blieb nicht aus. Die Maschinentechnik wendete sich nach kurz andauerndem Enthusiasmus von diesen theoretischen Spekulationen ab und ging auf dem empirischen Wege ohne Schaden weiter. ....

Die letzten Dezennien des 19. Jahrhunderts sahen drei kinetische Probleme aus der Praxis erwachsen, von denen jedes einzelne geeignet war, die Unzulänglichkeit der geometrischen Maschinenkinematik darzutun. Schnellaufende Dampfmaschinen .... wendeten die Aufmerksamkeit der Ingenieure der Massenkinematik der Getriebe zu und veranlaßten eine ausgedehnte Literatur, welche die Frage sonderbarerweise ab ovo behandelte, anstatt die sorgfältig ausgebildeten Untersuchungen von Poncelet und Yvon Villarceau direkt auf die gegebenen Fälle anzuwenden. Schon die Bezeichnung »Theorie der Massenwirkung in Mechanismen« war sehr geeignet, die der systematischen Mechanik Unkundigen zu dem Irrtum zu verleiten, als ob mit diesen Bestrebungen ein neues Gebiet der technischen Mechanik zur Entfaltung gekommen wäre. Weder Euler noch Lagrange, noch irgendeiner ihrer Nachfolger hatten jemals daran gedacht, bei der Untersuchung der Bewegung eines materiellen gebundenen Systems einen Teil der Massen zu ignorieren oder sie innerhalb des Systems nach rein statischen Prinzipien zu verlegen. Diese zuweilen gefährliche Unsitte ..., wurde erst durch das energische Auftreten Radingers mit Erfolg bekämpft.«

Weiter spricht dann Heun von dem Problem der Reaktionsbestimmungen im Lokomotiv- und Schiffsmaschinenbau, sowie der Kinetik der rollenden Fahrzeuge als drittem dieser Probleme. Radingers weniger auf theoretischer Kenntnis, als auf instinktivem Gefühl für die richtige Erfassung der Massenwirkungen beruhenden Leistungen hat er auch an anderen Stellen (19, S. 31 f.) rückhaltlos anerkannt.

Niemand, der diese Sätze im Zusammenhang liest, kann gegen Heun den Vorwurf mangelnden Verständnisses technisch-wissenschaftlicher Probleme und mangelnder Wertschätzung technischer Leistungen erheben; die Voraussetzungen für eine gedeihliche Zusammenarbeit des Theoretikers Heun mit den wissenschaftlichen Technikern waren hier gegeben. Daß er aber gerade in den Kreisen derer, an die er sich wendete, vielfach nur wenig Verständnis, ja

Ablehnung fand, hat ihn in den kommenden Jahren mehr und mehr erbittert und ihn schließlich in eine mehr formale Betrachtungsweise der Mechanik gedrängt, die sich in den späteren Jahren seiner Lehrtätigkeit auch im Unterricht auswirkte und diesen für die Allgemeinheit der Studierenden erschwerte. Gleichwohl blieb die temperamentvolle Form seines Vortrags, ob es sich um Vorlesung, wissenschaftliche Kolloquien oder sonstige Gelegenheiten handelte, nie ohne Eindruck auf die Zuhörer. Mit bitterem Sarkasmus, vermischt mit dem geistreichen Humor, der ihm, trotz vielfacher Enttäuschungen, bis zu den letzten Lebensjahren geblieben war, hat er immer wieder von dieser Verdrängung der wahren mechanischen Methoden durch unzulängliche, als »Wissenschaft« dargestellte Einzelmethoden gesprochen, die den Ruf der mechanischen Theorie überhaupt zu untergraben geeignet sei und höchstens ein Einzelwissen an Stelle umfassender Gesichtspunkte fördere, zum Schaden kritischer Einstellung, in der er das Ziel der Hochschulbildung wie jeder anderen Bildungsform sah. Je mehr er sich, infolge dieser Unterrichtsentwicklung, auf sich selbst gestellt fühlte, um so mehr wuchs seine eigene Persönlichkeit heraus und um so unabhängiger machte er sich von herkömmlichen Meinungen, wie in der Hochschule, so auch außerhalb seines wissenschaftlichen Ideenkreises.

Im engen Zusammenhang mit seiner Unterrichtstätigkeit und den dargelegten Auffassungen der Mechanik steht das größere »Lehrbuch der Mechanik« (25), das er in Angriff genommen hat, aber leider unvollendet lassen mußte. Der vorliegende erste Band, Kinematik, umfaßt dieses Gebiet in dem Sinne, wie es seine oben angeführten Worte betonten, und wie es z. B. auch der Hertzschen Abgrenzung des Gebiets entspricht. Er verzichtet von vornherein auf die vielfach noch unter diesem Namen verstandene rein geometrische Getriebelehre und geht vielmehr, durch die Einbegreifung des Massenbegriffs, direkt auf die Beschleunigungsgrößen der betrachteten Systeme aus. (Eine Abgrenzung, die, infolge der Relativitätstheorie, auch in der allgemeinen Physik die naturgemäße geworden ist.) In dieser Weise liegt in Wahrheit in dem Buch eine recht weitgehende Einführung in die allgemeine Mechanik vor, die nur vor der Berücksichtigung spezielle Kräftesysteme Halt macht. Es gelangt so in der Tat bis zu den allgemeinen kanonischen Gleichungen der Mechanik und zur Routhschen Funktion, als Grundlage der Stabilitätstheorie.

Auf Wunsch von Felix Klein übernahm es Heun ferner um 1905, für den Mechanikband der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften ein ausführliches Referat über dynamische Probleme der Maschinenlehre zu schreiben. Er entwarf einen eingehenden Plan hierzu, der eine längere prinzipielle Einleitung in die Mechanik der Systeme vorsah. Es entsprach der Wendung von Heuns Interessenkreis, die sich damals schon vorbereitete, daß er sich schließlich auf die Ausarbeitung dieses ersten Teiles beschränkte und das eigentliche Referat über die maschinentechnischen Fragen R. v. Mises überließ, den er zum Mitarbeiter gewonnen hatte. Als Artikel IV, 10 erschien sodann das Referat von v. Mises »Dynamische Probleme der Maschinenlehre«, das in seiner Anlage und seinen Grundgedanken an den oben genannten Bericht von Heun für die Mathematiker-Vereinigung anknüpft; ferner unter der Bezeichnung IV, 11 der ursprünglich als Einleitung gedachte Teil von K. Heun (27), der sich in seiner schließlichen Fassung (1913) auf die prinzipiellen Ansätze und allgemeinen Methoden der Systemmechanik beschränkt und in den späteren Teilen auch auf die physikalische Uebetragung mechanischer Prinzipien eingeht.

Wenn Heun einerseits versuchte, das Verständnis für die Anwendungsmöglichkeiten der Lagrangeschen Mechanik zu verbreiten, so hat ihn andererseits auch die theoretische Fortbildung dieses Systems der Mechanik immer beschäftigt, hauptsächlich in seinen gegenüber den Vorlesungen abstrakter gehaltenen Seminarübungen. Die Entwicklung der Mechanik war in den Arbeiten von Hamilton und Jacobi vorwiegend in die Richtung der Variationsrechnung gelenkt worden, infolge der schon Maupertuis und Euler im Einzelfall bekannten Tatsache, daß ihre Sätze sich als Extremalaufgaben formulieren lassen. Diese Formulierung geht bekanntlich, durch Integration und Nullsetzen der Randvariationen, aus der allgemeinen Form des D'Alembertschen Prinzips hervor, die irrtümlich Hamilton zugeschrieben wird:

$$\frac{d}{dt}(\Sigma\, p\,\delta q - H\delta t) = \delta T - \delta U,$$

die aber, auch in integrierter Form, schon bei Lagrange vorkommt; hierauf hat Heun wiederholt aufmerksam gemacht (z. B. 21, S. 73) und die Gleichung deshalb als »Lagrangesche Zentralgleichung« bezeichnet. Das Maupertuissche Prinzip hatte seinen Kern ja ursprünglich in metaphysischen Ueberlegungen, und vielleicht lag zunächst darin der Grund, warum Heun solche Formulierungen im Aufbau der Mechanik vermeiden wollte und die unverkürzte Zentralgleichung bevorzugte. Jedenfalls erwies diese sich auch als weittragender als das Hamiltonsche Prinzip, wenn man sich von den Beschränkungen frei machte, die in die Auffassung der mechanischen »virtuellen Verschiebungen« durch die Anforderungen der Variationsrechnung hineingetragen werden. Es ist nämlich nicht notwendig, für die virtuellen Verschiebungen Beziehungen von der Form $d\delta q = \delta dq$ anzunehmen, wie sie für Variationen der Koordinaten q zu fordern sind. Durch diese Gedanken gelang es, im Anschluß an Heun, seinem damaligen Mitarbeiter G. Hamel[1]), die weitläufigen Schwierigkeiten zu umgehen, die das Hamiltonsche Prinzip bei »nichtholonomen Systemen« findet und die, auf nicht leichtem Wege, erst von Hölder und Voß überwunden worden waren[2]). Bei Benut-

[1]) **Ueber die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik. Math. Ann. 59 (1904).**

[2]) **Vergl. Enc. d. math. Wiss. IV, 1, S. 92.**

zung der von Hamel verallgemeinerten Zentralgleichung, anstatt des Integralprinzips, treten solche Schwierigkeiten überhaupt nicht auf; die Behandlung der holonomen und nichtholonomen Systeme kann in gleicher Linie erfolgen.

Eine positive Weiterführung der allgemeinen Mechanik blieb auch weiterhin Heuns Bestreben, wobei er allerdings wohl vielfach zu sehr an der formalen Gestalt haftete. Jahrelang standen z. B. die Methoden der Gibbsschen Dyadenrechnung im Vordergrund seines Interesses, angeregt durch die 1905 erschienene Bewegungslehre von Jaumann, eines Forschers, mit dem er sich geistig stets eng verbunden und befreundet fühlte. Von hier aus suchte er die Wege zur Ausgestaltung der allgemeinen Mechanik mit »mehrdimensionalem Grundfeld« (d. h. Mechanik der Kontinua) in der Form der Lagrangeschen Zentralgleichung. Was ihn bei diesen Gedanken, die in verschiedenen Seminarniederschriften ausgearbeitet vorliegen, leitete, war: er war tief durchdrungen von der Ueberzeugung, daß es nur gelingen müsse, die Naturbeschreibung zu »mechanisieren«, um zu tieferer Erkenntnis vorzudringen, Gedanken, die bekanntlich auf Helmholtz, J. J. Thomson und andere zurückgehen. Daher sein Bemühen, diejenige Form der mechanischen Prinzipien zu finden, die ihm am unmittelbarsten zur Verallgemeinerung geeignet erschien. Eine Frucht dieser jahrelangen Beschäftigung ist schließlich noch seine letzte, knapp zusammenfassende Veröffentlichung (28) gelegentlich der Jahrhundertfeier der Karlsruher Hochschule. Als zentraler Begriff der Mechanik erschien ihm hier der der Leibnizschen Aktion, von der aus er das System der Mechanik aufbauen wollte, und zwar in der Form der Hamiltonschen Funktion $W = \int_{t_0}^{t} L\,dt$, deren partielle Ableitungen bekanntlich zu den Impuls- und Bahngleichungen der mechanischen Probleme führen.

Und — wenn auch in anderer Weise, als Heun selbst erwartet hatte — so hat doch die neuere Physik diesen Standpunkt von der zentralen Bedeutung der Aktion W bestätigt. Denn sie ist es ja, an die nach Schroedingers Gedanken die Analogie zwischen der klassischen Mechanik und der geometrischen Optik einerseits, der »Wellenmechanik« und der Beugungsoptik andererseits anknüpfte. Da man der Wellenmechanik heute den tieferen Wahrheitsgehalt zuschreibun muß, so ist also in der Tat die Aktion die Eingangspforte zu der, nur noch näherungsweise gültigen, klassischen Mechanik geworden. Die Mechanik selbst ist mit dieser neuen Entwicklung zum ersten Male über die Lagrangesche Konzeption, das »scientific poem«, nach Hamilton (vgl. 21, S. 63) hinausgewachsen, deren Verbreitung und Fortführung Heuns Lebenswerk gewidmet war (denn die Entwicklung z. B. zur Relativitätstheorie ist noch in diesem Gedankenkreis eingeschlossen).

Worin Heun zeitlebens Befriedigung suchte, waren Erfolge in der Arbeit, niemals äußere Ehrungen, die er, wie stets im Leben, noch über den Tod hinaus durch letztwillige Verfügung ablehnen wollte. Aber das kann seine Mitarbeiter und Freunde nicht hindern, seiner zu gedenken und ihn zu betrauern als den besten Kenner, Historiker und Kritiker der klassischen Mechanik, als den fruchtbaren Förderer der technischen Kinetik, zugleich als den wahrhaften Menschen, dem Klarheit und Einfachheit oberste Richtschnur seines Strebens und Handelns gewesen.

Verzeichnis der Veröffentlichungen.

1. Neue Darstellung der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen durch Determinanten. Göttinger Nachr. 1881 (104 bis 119).
2. Kugelfunktionen. Göttingen (Vandenhoeck) 1881.
3. Die Kugelfunktionen und Laméschen Funktionen als Determinanten. Dissertation, Göttingen 1881.
4. Ueber lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösungen durch den Kettenbruchalgorithmus verknüpft sind. Habilitationsschrift, München 1884.
5. Integration regulärer linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Kettenbruchentwicklung von ganzen Abelschen Integralen dritter Gattung. Mathem. Ann. 30, 1887 (553 bis 562).
6. Zur Theorie der mehrwertigen mehrfach linear verknüpften Funktionen. Acta Mathematica 11, 1887 (97 bis 119).
7. Remarks on the logarithmic integrals of regular linear differential equations. American Journal of Mathematics 10, 1888 (205 bis 224).
8. Ueber Eulers homogenen lineären Multiplikator zur Integration der regulären lineären Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mathem. Ann. 31, 1888 (363 bis 373).
9. Bemerkungen zur Theorie der mehrfach lineär verknüpften Funktionen. Acta Mathem. 12, 1888 (103 bis 108).
10. Zur Theorie der Riemannschen Funktionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. Mathem. Ann. 31, 1889 (161 bis 179).
11. Beiträge zur Theorie der Laméschen Funktionen. Mathem. Ann. 33, 1889 (180 bis 196).
12. Die Herstellung einer linearen Differentialgleichung aus einem gegebenen Element der Integralfunktion. American Journal of Mathematics 11, 1889 (215 bis 220).
13. Die Schwingungsdauer des Gaußschen Bifilarpendels. Göttinger Nachr. 1891 (151 bis 158).
14. Untersuchungen über die Gaußsche Quadraturmethode. Programm der Höheren Bürgerschule Berlin, 1892.
15. Ueber die mathematischen und mechanischen Prinzipien in Anwendung auf technische Probleme. Jahresber. d. d. Mathematikervereinigung, 5, 1896 (91 bis 92). Ebenso: Verh. d. Naturforschenden Gesellschaft Frankurt, 2, 1896.

16. Die Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes und der geraden Linie. Programm der 1. Realschule Berlin, 1898.
17. Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach den Methoden der Photogrammetrie. Ztschr. f. Mathem. u. Physik 44, 1899 (18 bis 27).
18. Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Ztschr. f. Math. u. Physik 45, 1900 (23 bis 28).
19. Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Bericht, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, 9, 2, 1900 (1 bis 123). (Auch gesondert erschienen: Leipzig 1900.)
20. Ueber die Hertzsche Mechanik. Sitzungsber. d. Berliner Mathem. Gesellsch. 1, 1901 (12 bis 16).
21. Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen. Archiv der Mathematik u. Physik, III, 2, 1901 (57 bis 77 u. 298 bis 326).
22. Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik, in systematischer und geschichtlicher Entwicklung dargestellt. Leipzig, Göschen, 1902.
23. Das Verhalten des Virials und des Momentes eines stationären Kräftesystems bei der Bewegung des starren Körpers. Ztschr. f. Mathematik u. Physik, 47, 1902 (101 bis 125).
24. Ueber die Einwirkung der Technik auf die Entwicklung der theoretischen Mechanik. Jahresber. d. d. Mathematikervereinigung 12, 1903 (389 bis 398).
25. Lehrbuch der Mechanik, I. Teil: Kinematik. Leipzig, Göschen, 1906.
26. Die Grundgleichungen der Kinetostatik der Körperketten mit Anwendungen auf die Mechanik der Maschinen. Ztschr. f. Math. u. Physik, 56, 1908 (38 bis 77).
27. Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV, 11, 1913 (357 bis 504).
28. Grundlagen der modernen Mechanik (Vorgänge und Zustände mit linearem und mehrdimensionalem Grundfeld). Festschrift zur Hundertjahrfeier der Technischen Hochschule Karlsruhe, 1925 (67 bis 95).

Breslau. F. Noether. 970

Franz Prásil †. Am 3. Januar 1929 verschied in Zürich Prof. Dr. Franz Prášil, der während 32 Jahren den Lehrstuhl für Wasserkraftmaschinen an der Eidg. Hochschule in Zürich inne hatte.

Prášils wissenschaftliche Tätigkeit erstreckte sich fast ausschließlich auf das Gebiet der theoretischen und praktischen Hydraulik und Hydrodynamik. Zahlreiche Abhandlungen, die meistens in der Schweizerischen Bauzeitung erschienen sind, und das im Verlag Springer vor kurzem in zweiter Auflage erschienene Buch: »Technische Hydrodynamik« geben Zeugnis seiner intensiven Tätigkeit und vor allem auch seiner Originalität.

Vor rund 25 Jahren begann Prášil hydrodynamische Methoden in die Theorie der Wasserturbinen einzuführen. Es war dazu nicht wenig Mut erforderlich, da um jene Zeit die theoretische Hydrodynamik bei den Ingenieuren unbekannt war oder in schlechtem Ansehen stand und die eindimensionale auf Euler zurückgehende Theorie vorherrschte. Diese Theorie hatte man allmählich mit allerlei künstlichen Zusatzannahmen weit über den Bereich hinaus angewendet, der ihrem Schöpfer vorgeschwebt haben mochte und die Lücken traten sehr deutlich zutage, insbesondere bei der Behandlung der sog. Schnelläufer. In der 1903 erschienenen Abhandlung »Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen« (S. B.-Ztg. Bd. 41) und in einem weiteren Aufsatz aus dem Jahre 1906 (Bestimmung der Kranzprofile und Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen, S. B.-Ztg. Bd. 48) zeigte er, wie die auf Zylinderkoordinaten transformierten Eulerschen Gleichungen insbesondere bei Potentialströmung relativ einfache Lösungen von praktischer Wichtigkeit haben. Das in der ersten Arbeit durchgerechnete Trompetensaugrohr ($r^2 z = \text{konst.}$) hat sogar eine gewisse Berühmtheit erlangt, insbesondere als es von Lorenz in seiner zweidimensionalen Turbinentheorie verwendet wurde. Die damals sehr lebhafte Diskussion über diese Theorie und über hydrodynamische Turbinen-Theorien im allgemeinen (Z. f. d. ges. Turb.-wesen 1907) ist auch heute noch lesenswert. Die späteren Arbeiten von Bauersfeld und v. Mises sind wohl durch den Prášilschen Vorstoß in mancher Beziehung angeregt worden. Durch die Entwicklung der schnellaufenden Axialräder sind diese Untersuchungen zeitweise in den Hintergrund getreten, es ist aber wohl denkbar, daß eine Vereinigung der älteren und der neuesten Ansätze (auf Grund der Tragflügeltheorie) zu einer soliden hydrodynamischen Turbinentheorie führen wird.

Die »Technische Hydrodynamik« ist weniger ein Lehrbuch, als eine Monographie, die die Prášilschen Untersuchungen zur Hydrodynamik umfaßt. Die zweite Auflage enthält u. a. zahlreiche für den praktischen Gebrauch bestimmte »konforme Netze« mit denen Prášil eine Vereinfachung der rechnerischen Arbeit bei der konformen Abbildung erreichte, ein Verfahren, das anscheinend noch ausbaufähig sein dürfte. Sehr bemerkenswert ist die Anwendung der konformen Abbildung auf die zeichnerische Darstellung von Schaufelschnitten (S. B.-Ztg. 1908 Bd. 52), ein schönes Beispiel angewandter Mathematik. Durch enge Beziehungen mit der Praxis angeregt, hat Prášil sich mit fast allen Fragen der Hydraulik befaßt. Wasserschloßprobleme, Druckstöße in Rohrleitungen, Ueberfallmessungen usw. beschäftigten ihn in bunter Abwechslung. Von vielen seiner Studien hat er leider nur in Vorlesungen kurze Andeutungen gemacht.

Auch im Maschinen-Laboratorium war Prášil sehr tätig. Wohlbekannt sind seine mustergültigen vergleichenden Untersuchungen an Reaktions-Niederdruckturbinen (S. B.-Ztg. 1905 Bd. 45), seit Francis die bei weitem sorgfältigsten und eingehendsten Versuche. Lebhaft interessierten ihn Strömungsbilder, von denen die zweite Auflage seines Lehrbuches eine Fülle enthält.

Mit Prášil ist ein hervorragender Vertreter angewandter Mechanik hinweggegangen; ein Lehrer, dem seine zweite Heimat, die Schweiz, überaus viel zu verdanken hat; ein Mensch von unbegrenztem Wohlwollen.

Zürich, den 4. März 1929. J. Ackeret. 973

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 22. Februar sprach Hr. Dr. W. Cauer-Göttingen über »Theorie und Praxis der Wechselstromschaltungen«.

Ortsgruppe Göttingen.

Hr. Dr. Wilhelm Müller-Hannover hielt am 20. Februar einen Vortrag über »Ebene Bewegung von Wirbeln in einer geradlinig begrenzten idealen Flüssigkeit« (Anwendung von elliptischen Funktionen auf Hydrodynamik).

Die Hauptversammlung der Gesellschaft wird im Rahmen eines Mathematiker- und Physiker-Tages in der Woche vom 15. bis zum 21. September ds. Js. in Prag stattfinden. Die Prager Kollegen haben gemeinsam mit den Physikern und Mathematikern einen Ortsausschuß gebildet, der die Versammlung mit großer Sorgfalt vorbereitet. Vortragsanmeldungen sind möglichst bald, spätestens bis 15. Juli, an Prof. v. Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9, zu richten.

Die Verlagsgesellschaft Oldenbourg bietet den Mitgliedern der Gesellschaft den »Technischen Literaturkalender für 1929« bei Bestellung durch den Geschäftsführer zum Vorzugspreise von 20 M statt 24 M an.

Die Technische Hochschule Danzig feiert im Juli ds. Js. ihr 25-jähriges Bestehen. Sie fordert alle ehemaligen Angehörigen der Hochschule auf, an der Feier, die vom 18.—20. Juli stattfindet, teilzunehmen.

Neue Technische Hochschulen. Der Vorstand des Vereines deutscher Ingenieure hat nach eingehender Beratung eine Denkschrift veröffentlicht, die sich mit der größten Entschiedenheit gegen die Neugründung von Technischen Hochschulen im Deutschen Reich ausspricht. In den Schlußfolgerungen des Berichtes heißt es »Wir halten es für dringend geboten, daß die Geldmittel, die unbedingt für die Ausbildung der Ingenieure vorhanden sein müssen, konzentriert werden auf den Ausbau der bestehenden Hochschulen und ihre Anpassung an die heutigen Erfordernisse.« »Darüber hinaus bitten wir dringend die in Technik und Industrie führenden Männer, sich mit uns dafür einzusetzen, daß die schweren Schäden, die sich durch die Ueberspannung des Berechtigungswesens heute schon zeigen, zurückgedämmt werden.«

Preisausschreiben der W. G. L. Die Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt hatte ihr im Jahre 1925 erlassenes Preisausschreiben mit dem Termin Januar 1928 erneuert[1]). Von den neu eingelaufenen Arbeiten wurden die folgender Verfasser ausgezeichnet:

Dr. H. Blenk und Dr. F. Liebers, Bln.-Adlershof mit einem Preise von 2500 M,
Manfred Rauscher, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, U. S. A.,
Dr. Mathar, Aachen, Technische Hochschule
mit Preisen von je 2000 M.

Außerdem wurden Arbeitsbeihilfen gewährt an:
Fräulein Dipl.-Ing. Ilse Kober, Bln.-Adlershof,
Dr.-Ing. H. Steuding, Breslau.

Ernst Abbe-Gedächtnispreis. Der von der Carl Zeiß-Stiftung in Jena begründete Ernst Abbe-Gedächtnispreis und die damit verbundene Abbe-Medaille, die im Jahre 1928 zum ersten Male für Anwendungsgebiete der Mathematik und Physik zur Vergebung kommen sollten, sind nach dem Urteil des Preisgerichts (Prof. Hecker-Jena, Prof. Prandtl-Göttingen, Prof. Zenneck-München) dem Prof. Dr. Dr.-Ing. h. c. Alexander Meißner-Berlin, dem »Erfinder des Röhrengenerators«, zuerkannt worden.

Persönliches. Als Privatdozent für technische Mechanik habilitierte sich an der Technischen Hochschule Breslau Dr.-Ing. Herm. Steuding, Assistent bei Prof. L. Mann am Lehrstuhl für Mechanik.

Prof. Dr. A. Nádai von der Universität Göttingen ist nach Pittsburgh, U. S. A., als Leiter des Research Laboratory der Westinghouse Company übersiedelt.

Hr. Prof. Dr. A. Stodola in Zürich feiert am 10. Mai seinen siebzigsten Geburtstag, der von seinen zahlreichen Freunden und Schülern festlich begangen werden wird. 976

Hr. Dr. Frank Löbell hat sich an der Technischen Hochschule Stuttgart für Mathematik habilitiert.

Hr. Dr. H. Koschmieder, Direktor des staatl. Observatoriums Danzig, wurde zum a. o. Professor der Technischen Hochschule ernannt.

[1]) Vergl. diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 247.

(Redaktionsschluß 20. April 1929.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.